

**ФИЛИАЛ МОСКОВСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО  
УНИВЕРСИТЕТА ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА  
В ГОРОДЕ ДУШАНБЕ**

**Абдукаримов М.Ф.**

**Методические указания по курсу основ высшей  
математики для студентов направления подготовки  
41.03.05 - Международные отношения**

**Душанбе - 2020**

ББК: Я 73 22.1

УДК: 512.1 (075.8) (575.3)

A-14

**Абдукаримов Махмадсалим Файзуллоевич.** Методические указания по курсу основ высшей математики для студентов направления подготовки 41.03.05 Международные отношения. Душанбе, 2020. - 124 стр.

*Рекомендовано к печати Научно методическим советом  
Филиала МГУ имени М.Ф. Ломоносова в городе Душанбе  
от 17.06.2020, протокол №5*

**Рецензенты:** Казиджанова Н.М., к.т.н., доцент кафедры фундаментальных и естественных наук филиала МГУ имени М.В. Ломоносова в городе Душанбе;  
Зарифзода С.К., к.ф.-м.н., доцент, заведующий кафедрой вычислительной математики и механики Таджикского национального университета.

© Абдукаримов М.Ф.

## Предисловие

На современном этапе развития общества, когда увеличивается объем экономической, статистической и другой информации, математические методы и средства исследования становятся важным атрибутом как естественных, так и общественных наук.

Данное учебно-методическое пособие написано на основании Рабочей программы дисциплины «Основы высшей математики» для студентов первого курса направления подготовки 41.03.05 Международные отношения Филиала Московского государственного университета имени М.В.Ломоносова в городе Душанбе.

В нём по каждой теме, предусмотренной Рабочей программой данной дисциплины, приведено достаточное количество задач для самостоятельной работы. Приведены также образец варианта контрольной работы для первого семестра, образец варианта итоговой зачетной работы (первый семестр) и образец варианта контрольной работы для второго семестра с подробными решениями задач.

В пособии сделаны методические рекомендации, а также указаны необходимая литература и интернет-ресурсы по подготовке к выполнению самостоятельной работы.

Так как пособие в основном написано для студентов гуманитарных направлений, выбраны задачи начального и среднего уровня сложности. Несмотря на это, оно

может быть полезно и студентам других направлений Филиала.

Надеемся, пособие будет способствовать повышению математической культуры будущих специалистов-дипломатов, которая является составляющей общечеловеческой культуры, развивает у студентов современных форм математического и логического мышления, а также умение ставить, исследовать и решать сложные задачи, возникающие в профессиональной практике.

## §1. Цели и задачи дисциплины

Важным элементом профессиональной культуры специалиста по международным отношениям служит умение логически мыслить, строго рассуждать, проводить доказательства, формулировать правдоподобные гипотезы, вскрывать закономерности явлений. Как учебный предмет математика обладает огромным потенциалом для развития всех перечисленных умений. Именно математика развивает логическое мышление, способность к абстрагированию, такие качества мышления как гибкость, конструктивность, критичность и т.д. На современном этапе развития общества, когда увеличивается объем нормативно-правовой, экономической, статистической и другой информации, математические методы и средства исследования становятся важным атрибутом общественных наук.

Как учебная дисциплина «Основы высшей математики» обладает огромным мировоззренческим потенциалом, предоставляет большие возможности для подготовки будущих специалистов-международников.

**Целью** дисциплины «Основы высшей математики» является формирование у студентов основ математической культуры, которая является составляющей общечеловеческой культуры. Необходимо выработать у студентов знания и умения логически мыслить, оперировать с абстрактными

объектами, корректно употреблять математические термины, язык, владеть определенным математическим аппаратом, который позволил бы осуществлять хотя бы простейший количественный анализ информации, отказавшись при этом от привития им технических навыков математических преобразований.

**Задачи** дисциплины «Основы высшей математики» заключается в развитии у студентов современных форм математического и логического мышления, а также умения ставить, исследовать и решать сложные задачи, возникающие в профессиональной практике. Курс из самых разных математических составляющих построен таким образом, чтобы в конечном итоге у студента-гуманитария сложилось целостное и правильное восприятие математики.

## **§2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата**

Данная дисциплина относится к обязательной части учебного плана направления подготовки 41.03.05 Международные отношения и является базовой. Преподается она в течение первого года обучения (в первом и втором семестрах). Для изучения дисциплины необходимы знания и умения по математике за курс общеобразовательной средней школы. «Основы высшей математики» является предшествующей для следующих дисциплин: информатика и экономика.

### **§3. Планируемые результаты**

В результате изучения данной дисциплины у обучающихся формируются следующие компетенции:

#### **Универсальные компетенции**

##### ***Системное и критическое мышление:***

Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1).

##### ***Самоорганизация и саморазвитие:***

Способен управлять своим временем, выстраивать и реализовывать траекторию саморазвития на основе принципов образования в течение всей жизни (УК-6).

### **§4. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке**

В результате аттестации по учебной дисциплине осуществляется комплексная проверка следующих знаний, умений и владений, а также динамика формирования компетенций:

Таблица 1.

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения
УК-1, УК-6	<p><b>Знать:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– историю развития математики, её роль и место в различных сферах человеческой деятельности;</li> <li>– основные законы логики, основные понятия и методы математического анализа, аналитической геометрии, линейной алгебры, элементы теории вероятностей и математической статистики;</li> <li>– фундаментальные понятия математики;</li> <li>– специфику и универсальность математического языка;</li> <li>– математические методы сбора и обработки статистической информации.</li> </ul> <p><b>Уметь:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– логически верно излагать теорию, формулировать задачи и излагать их решение;</li> <li>– использовать изученные математические методы при решении задач по специальности;</li> <li>– классифицировать практические задачи по изученным разделам</li> </ul>

	<p>математики;</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– правильно выбирать метод анализа для решения поставленной задачи;</li> <li>– проводить количественный анализ полученной информации.</li> </ul>
	<p><b>Владеть:</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– математической терминологией;</li> <li>– культурой мышления, способностью к анализу;</li> <li>– базовыми знаниями фундаментальных разделов математики;</li> <li>– решением некоторых логических задач;</li> <li>– использованием математических понятий и методов в профессиональной деятельности;</li> <li>– работой со статистической информацией.</li> </ul>

**§5. Объем дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических или астрономических часов**

Объем дисциплины составляет 4 зачетных единицы или 144 часа, из которых:

лекции - 54 часа;

практические занятия - 36 часов;

самостоятельная работа - 54 часа.

Форма текущего контроля: опрос, решение задач, контрольные работы.

Форма промежуточного и итогового контроля: 1 семестр – зачет, 2 семестр – экзамен.

## §6. Распределение трудоемкости по разделам и темам

№	Наименование разделов и тем дисциплин	Трудоёмкость по формам занятий			ФК
		Аудиторная работа		СР	
		Л	ПЗ		
<b>Раздел 1. Введение. Множества и операция над ними</b>					
1	Место и роль математики в современном мире. Понятие множества, индукции и дедукции. Теоремы, аксиомы, определения и аксиоматический метод	2	2	2	ИДЗ, опрос
2	Числовые множества. Операции над множествами	2	2	2	ИДЗ, опрос
<b>Раздел 2. Дискретная математика</b>					
3	Элементы комбинаторики	2	2	2	ИДЗ, опрос
<b>Раздел 3. Основы линейной алгебры</b>					
4	Матрицы и действия над ними. Определители и их свойства	2	4	2	ИДЗ, опрос
5	Системы линейных	4	2	2	ИДЗ,

	алгебраических уравнений				опрос
<b>Раздел 4. Элементы аналитической геометрии</b>					
6	Векторы. Линейные операции над векторами	2	2	2	ИДЗ, опрос
7	Декартова система координат. Уравнение прямой на плоскости	2	2	2	ИДЗ, опрос
8	Кривые второго порядка	2	2	4	ИДЗ, опрос, КР, зачет
<b>Раздел 5. Основы математического анализа</b>					
9	Понятие функции. Свойства и графики элементарных функций	4	2	4	ИДЗ, опрос
10	Числовая последовательность и ее предел. Предел функции. Замечательные пределы	4	2	4	ИДЗ, опрос
11	Непрерывность функции. Разрывы	2	2	2	
12	Производная функции и ее применения. Исследование функции	4	2	4	ИДЗ, опрос
13	Первообразная функции и неопределённый интеграл	4	2	4	ИДЗ, опрос
14	Определённый интеграл и его применения	4	2	2	ИДЗ, опрос
<b>Раздел 6. Основы теории вероятностей и математической статистики</b>					
15	Случайные события. Понятие вероятности.	4	2	4	ИДЗ, опрос

	Основные теоремы и формулы				
16	Случайные величины и их числовые характеристики. Функции и законы распределения	4	2	4	ИДЗ, опрос
17	Основы математической статистики	6	2	8	ИДЗ, опрос, КР, экзамен
<b>Всего:</b>		<b>54</b>	<b>36</b>	<b>54</b>	

**Примечание:** Л - лекция; ПР - практические занятия; СР - самостоятельная работа; ФК - форма контроля; ИДЗ - индивидуальное домашнее задание; КР - контрольная работа.

## **§7. Содержание дисциплины**

### **Раздел 1. Введение. Множества и операция над ними**

*Тема 1. Место и роль математики в современном мире. Понятие множества, индукции и дедукции. Теоремы, аксиомы, определения и аксиоматический метод.*

**Содержание темы.** Место и роль математики в современном мире. Понятие множества, индукции и

дедукции. Полная и неполная индукция. Примеры индукции и дедукции. Метод математической индукции. Понятие теоремы, аксиомы, определения и аксиоматического метода. Геометрия Евклида как первая естественнонаучная теория.

### Задания для самостоятельной работы

1. Приведите пример неполной индукции.
2. Приведите пример полной индукции.
3. Приведите примеры дедукции.
4. С помощью неполной индукции получить формулу для вычисления следующих сумм:

$$1) S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)};$$

$$2) S_n = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3;$$

$$3) S_n = \arctg \frac{1}{2} + \arctg \frac{1}{8} + \arctg \frac{1}{18} + \dots + \arctg \frac{1}{2n^2};$$

$$4) S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1);$$

$$5) S_n = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 2n - 1.$$

Докажите полученные формулы с помощью метода математической индукции.

5. Пусть  $V$  — число вершин выпуклого многогранника,  $P$  — число его рёбер и  $\Gamma$  — число граней. Докажите, что верно равенство  $V-P+\Gamma=2$  (Формула Эйлера).

6. Является ли следующая цепочка дедукцией:

- а. Все студенты отличники.
- б. Карим - студент.
- в. Следовательно, Карим отличник?

7. Является ли следующая цепочка дедукцией:

- а. Все студенты имеют аттестат.
- б. Карим - студент.
- с. Следовательно, Карим имеет аттестат.

8. Найдите все четные числа вида  $5n+3$ , удовлетворяющие условию  $5n+3 < 42$ .

***Тема 2. Числовые множества. Операции над множествами.***

**Содержание темы.** Понятие множества. Множество натуральных, целых, рациональных и иррациональных чисел. Пустое множество. Подмножество. Равные множества. Диаграммы Эйлера - Венна . Основные операции над множествами.

## Задания для самостоятельной работы

1. Запишите множество  $A$  перечислением его элементов. Пусть  $A = \{k \in N : 1,4 < k < 8\}$ , здесь  $N$  – множество натуральных чисел.

2. Приведите пример квадратного уравнения, множество корней которого является пустым.

3. Найдите множество всех решений неравенства  $|x + 2| + |x + 3| \leq 3$ .

4. Даны два множества:  $A = \{1; 2; 3; 4\}$  и  $B = \{3; 4; 5; 6\}$ . Запишите множества, представляющие: пересечение  $A \cap B$ ; объединение  $A \cup B$ ; разность  $A \setminus B$ ; симметрическую разность  $A \Delta B$ .

5. Даны множества  $A = \{1,3,5,7,9\}$  и  $B = \{0,3,4,7,8\}$ . Найти:  $A \cap B$ ;  $A \cup B$ ;  $A \setminus B$ ;  $A \Delta B$ .

6. Даны множества  $A = \{1,2,3,5,6\}$ ,  $B = \{0,1,4,5,8\}$  и  $C = \{0,1,3,5,7\}$ . Найти:  $(A \cup B) \cap C$ ;  $(A \setminus B) \cup C$ ;  $(A \Delta C) \setminus B$ ;  $(A \cup B) \cap (A \setminus C)$ ;  $(A \setminus C) \cap (A \setminus B)$ .

7. В группе 25 человек изучают английский язык, 10 человек – немецкий язык, а 5 человек – одновременно английский и немецкий языки. Сколько

студентов изучают английский или немецкий язык?

**8.** В гимназии все ученики знают хотя бы один из древних языков — греческий или латынь, а некоторые — оба языка. 85% всех ребят знают греческий язык и 75% знают латынь. Какая часть учащихся знает оба языка?

**9.** Пусть  $A$ —«множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово МЕЖДУНАРОДНЫЕ ОТНОШЕНИЯ», а  $B$ —«множество, состоящее из различных букв русского алфавита, входящих в слово МАТЕМАТИКА». Найти объединение, пересечение, разность и симметрическую разность этих множеств.

**10.** Доказать, что каждое из чисел  $\sqrt{2}$ ;  $\sqrt{3}$ ;  $\sqrt{2} + \sqrt{3}$  является иррациональным.

**11.** Пусть  $A$  - множество решений неравенства  $|x - 2| \leq 3$  и  $B$  - множество решений уравнения  $x^3 + 3x^2 + 2x = 0$ . Найти:  $A \cap B$ ;  $A \cup B$ ;  $A \setminus B$ ;  $A \Delta B$ .

**12.** Найти множество решений следующих систем:

$$1) \begin{cases} 2(x + 3) - 1 > 2, \\ 3(x - 1) \leq 5 - x; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} 3(2x + 3) + 1 > 2 + x, \\ 5(3x - 1) + x \leq 5 + x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{2(x+3)}{3} - 1 \geq 2x, \\ \frac{1-x}{2} - \frac{x+3}{3} < \frac{1}{6}; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2\frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{3}\right) \leq x + 2, \\ 3\frac{1}{4}\left(x - \frac{1}{3}\right) \geq x - 3. \end{cases}$$

## Раздел 2. Дискретная математика

### Тема 1. Элементы комбинаторики.

**Содержание темы.** Основные понятия, правила и формулы комбинаторики: факториал, перестановки, размещения, сочетания, правило сложения и умножения. Применение элементов комбинаторики в решении конкретных задач.

### Задания для самостоятельной работы

1. Вычислить:

$$1) \frac{99! + 100!}{98!}; \quad 2) A_{12}^2 + A_{13}^2; \quad 3) C_8^3 + C_{12}^4.$$

2. Найдите все натуральные числа  $n$ , для которых выполняются следующие равенства:

$$1) A_n^2 + A_{n-1}^3 = 18; \quad 2) C_n^2 = 36.$$

3. Сколькими способами можно распределить по

вагонам 13 проводников, если за каждым вагоном закрепляется один проводник?

**4.** Сколькими способами 28 учеников могут выстроиться в очередь в столовую? Как изменится это число, если Петю и Колю нельзя ставить друг за другом?

**5.** В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

**6.** В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?

**7.** Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?

**8.** В шахматном турнире принимали участие 18 шахматистов, причем каждый из них сыграл только одну партию с каждым из остальных. Сколько всего партий было сыграно в этом турнире?

**9.** Пусть в книжном магазине имеются 8 различных видов книг по международным отношениям и 5 различных книг по высшей математике. Сколькими

способами можно выбрать в подарок книгу по международным отношениям или книгу по высшей математике? Сколькими способами можно выбрать две книги, по высшей математике и международным отношениям?

**10.** Сколькими способами можно выбрать гласную и согласную буквы из слова ДИПЛОМАТ.

**11.** Сколькими способами студенту направления подготовки «Международные отношения» можно выбрать две книги по разным наукам, когда на полке находятся 14 книг по международным отношениям, 10 книг по информационным технологиям и 6 книг по высшей математике?

**12.** В группе студентов направления подготовки «Международные отношения» числится 30 человек. Сколько всего существует различных способов выбора старосты группы и его заместителя?

**13.** Пусть в магазине имеются 9 различных видов коробок конфет и 7 различных коробок печенья. Сколькими способами можно выбрать в подарок коробку конфет или коробку печенья? Сколькими способами можно составить набор, состоящий из коробки конфет и коробки печенья?

**14.** Сколько существует вариантов для выступающих на собрании учебной группы, если для выступления на собрании записалось всего 5 человек?

**15.** Сколько трехзначных чисел можно составить из

цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, если цифры в числах не повторяются?

**16.** В студенческой группе международных 16 девушек и 14 юношей. Сколькими способами можно выбрать двух студентов–международников одного пола.

**17.** В книжном магазине в отделе «Международные отношения» продают 8 книг зарубежных авторов по международным отношениям и 6 книг по международным отношениям российских авторов. Сколькими способами можно выбрать:

- а) 3 книги по международным отношениям;
- б) 5 книг по международным отношениям только зарубежных или только российских авторов;
- в) 4 книги по международным отношениям зарубежных авторов и 3 книги российских авторов?

**18.** В группе студентов направления подготовки «Международные отношения» 16 девушек и 14 юношей. Из них выбирают по жребию трех человек в оргкомитет мероприятия «День дипломата». Сколько существует способов выбрать в оргкомитет 2 девушек и 1 юношу?

**19.** Колода состоит из 36 карт. Сколько всего существует способов извлечь одну даму и двух королей, без учета их масти?

**20.** Сколько поединков по борьбе должны быть проведены между 17 спортсменами, если каждый из них должен встретиться с каждым?

### Раздел 3. Основы линейной алгебры

#### *Тема 1. Матрицы и действия над ними. Определители и их свойства.*

**Содержание темы.** Понятие матрицы. Действия над матрицами и их свойства. Транспонированная матрица. Определитель второго и третьего порядка и формулы их вычисления. Понятие определителя  $n$ -го порядка и его свойства. Миноры. Алгебраические дополнения. Разложение определителя по строкам (столбцам). Ранг матрицы и методы его нахождения. Обратная матрица и методы её вычисления.

#### **Задания для самостоятельной работы**

1. Для матриц  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -5 & 4 & 7 \end{pmatrix}$  и  $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 0 & -5 \end{pmatrix}$

вычислите матрицу  $3AB^T + A$ .

2. Для матриц  $A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

найти  $A + B$ ,  $3A + B$ ,  $2A - 3B$ .

3. Найти произведение матриц:

1)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ;

$$2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -4 & 5 & 6 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

**4. Вычислить:**

$$1) \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}; \quad 2) \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}; \quad 3) \begin{vmatrix} 2,5 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \quad 4) \begin{vmatrix} 1,5 & 2,4 \\ 10 & 2 \end{vmatrix};$$

$$5) \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 5 \\ \frac{1}{5} & 4 \end{vmatrix}; \quad 6) \begin{vmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{3} \\ 6 & 7 \end{vmatrix}; \quad 7) \begin{vmatrix} 2,5 & \frac{5}{3} \\ 9 & 8 \end{vmatrix}; \quad 8) \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & 3\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{5} & \frac{2}{3} \end{vmatrix};$$

$$9) \begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}; \quad 10) \begin{vmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}; \quad 11) \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix};$$

$$12) \begin{vmatrix} \sin\alpha & -\cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix}; \quad 13) \begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix}; \quad 14) \begin{vmatrix} \operatorname{tg}\alpha & 1 \\ 2 & \operatorname{ctg}\alpha \end{vmatrix};$$

$$15) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 3 \end{vmatrix}; \quad 16) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}; \quad 17) \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix};$$

$$18) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix}; \quad 19) \begin{vmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}; \quad 20) \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 5 \\ 9 & 6 & 3 \end{vmatrix};$$

**5. Решите уравнение:**

$$1) \begin{vmatrix} x-1 & x \\ 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 0; \quad 2) \begin{vmatrix} 2x+1 & x-3 \\ 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 9; \quad 3) \begin{vmatrix} x & 2x-3 & 4 \\ 2 & x+3 & -3 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

**6. Найти ранг следующей матрицы:**

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad 3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}; \quad 5) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & -4 & -6 & 0 & 2 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу:

$$1) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}; \quad 2) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}; \quad 3) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 3 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad 5) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \end{pmatrix}; \quad 6) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

8. Швейное предприятие производит зимние пальто, демисезонные пальто и плащи. Плановый выпуск за декаду характеризуется вектором  $\vec{X} = (10; 15; 23)$ . Используются ткани четырех типов  $T_1, T_2, T_3, T_4$ . В таблице приведены нормы расхода ткани (в метрах) на каждое изделие. Вектор  $\vec{C} = (40; 35; 24; 16)$  задает стоимость метра ткани каждого типа, а вектор  $\vec{P} = (5; 3; 2; 2)$  – стоимость перевозки метра ткани каждого вида.

Изделие	Расход ткани			
	$T_1$	$T_2$	$T_3$	$T_4$
Зимнее пальто	5	1	0	3
Демисезонное пальто	3	2	0	2
Плащ	0	0	4	3

1) Сколько метров ткани каждого типа потребуется для выполнения плана?

2) Найти стоимость ткани, расходуемой на пошив изделия каждого вида.

**9.** Решите неравенство:

$$1) \begin{vmatrix} x & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \leq -9; \quad 2) \begin{vmatrix} x+3 & 5 \\ 2 & -x-4 \end{vmatrix} \geq -30;$$

$$3) \begin{vmatrix} 1 & 2 & x \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & x & 1 \end{vmatrix} > 5; \quad 4) \begin{vmatrix} 2x & 3 & x \\ 5 & -2 & 3 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} < 10.$$

**10.** Для матрицы  $A = \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ -4 & 2 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$  найдите

обратную матрицу  $A^{-1}$  и сделайте проверку.

**11.** Решите матричные уравнения:

$$1) \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}. \quad 2) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 9 \\ 5 & 2 & -8 \\ 0 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

**Тема 2. Системы линейных алгебраических уравнений.**

**Содержание темы.** Понятие системы линейных уравнений и основные определения. методы решения системы линейных алгебраических уравнений: метод Гаусса, правило Крамера и метод обратной матрицы. Теорема Кронекера-Капели. Использование систем линейных алгебраических уравнений при решении других задач.

**Задания для самостоятельной работы**

**1.** Решите систему линейных уравнений тремя методами: 1) методом обратной матрицы; 2) по формулам Крамера; 3) методом Гаусса:

$$1) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 = 3; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 = 3; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 6, \\ 3x_1 - 4x_2 = 2; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{1}{2}x_1 + \frac{2}{3}x_2 = \frac{1}{6}, \\ x_1 + 2x_2 = 5; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 2; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 2; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 10; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 2, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

2. Исследовать систему линейных алгебраических уравнений на совместность. Если она совместна, то найдите её общее решение:

$$1) \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 5, \\ 2x_1 + 6x_2 = 13; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = 7, \\ -4x_1 + 6x_2 = -14; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5, \\ 2x_1 - x_2 = 0; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 = 8, \\ 4x_1 + x_2 = 12; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 11; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = 4, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 2, \\ 2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 8; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 2; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 6; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = -1, \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3. \end{cases}$$

**3.** Из некоторого листового материала необходимо выкроить 360 заготовок типа А, 300 заготовок типа Б и 675 заготовок типа В. При этом можно применять три способа раскроя. Количество заготовок, получаемых из каждого листа при каждом способе раскроя, указано в таблице:

Тип заготовки	Способ раскроя		
	1	2	3
А	3	2	1
Б	1	6	2
В	4	1	5

Записать в математической форме условия выполнения задания.

**4.** На предприятии имеется четыре технологических способа изготовления изделий А и Б из некоторого сырья. В таблице указано количество изделий, которое

может быть произведено из единицы сырья каждым из технологических способов:

Изделие	Выход из единицы сырья			
	I	II	III	IV
A	2	1	7	4
Б	6	12	2	3

Записать в математической форме условия выбора технологий при производстве из 94 ед. сырья 574 изделий А и 328 изделий Б.

5. Найти для заданной матрицы обратную матрицу с помощью системы линейных алгебраических уравнений:

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

6. Найти вычислительную формулу для следующих сумм с помощью системы линейных алгебраических уравнений:

$$1) S_n = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n$$

$$(S_n = an^2 + bn, \quad a, b \in Z);$$

$$2) S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$(S_n = an^3 + bn^2 + cn, \quad a, b, c \in Z);$$

$$3) S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n \cdot (n + 1)$$

$$(S_n = an^3 + bn^2 + cn, \quad a, b, c \in Z).$$

## Раздел 4. Элементы аналитической геометрии

### *Тема 1. Векторы. Линейные операции над векторами.*

**Содержание темы.**  $n$  - мерные векторы. Линейные операции над векторами и их свойства. Линейное векторное пространство. Линейная зависимость векторов. Линейная независимость векторов. Базис и размерность линейного векторного пространства. Скалярное произведение двух векторов. Евклидово пространство. Понятие нормы вектора и её свойства. Угол между двумя векторами. Ортонормированный базис.

### **Задания для самостоятельной работы**

**1.** Найдите значение параметра  $\lambda$ , при котором векторы  $\vec{x}_1 = (2; 1; -1)$ ,  $\vec{x}_2 = (3; 5; 7)$ ,  $\vec{x}_3 = (1; \lambda; 8)$  линейно зависимы.

2. Представьте вектор  $\vec{a} = (1; 1; 1)$  в виде линейной комбинации векторов  $\vec{e}_1 = (1; 1; -1)$ ,  $\vec{e}_2 = (1; -1; 1)$ ,  $\vec{e}_3 = (-1; 1; 1)$ .

3. Даны три вектора:  $\vec{a}_1 = (1,3)$ ;  $\vec{a}_2 = (2,1)$ ;  $\vec{a}_3 = (5,2)$ . Доказать, что векторы  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  линейно независимы и выразить вектор  $\vec{a}_3$  через  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$ .

4. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a}_1 = (2,3)$ ;  $\vec{a}_2 = (1, -4)$ .

5. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , если их длины  $|a| = 3$ ,  $|b| = 6$ , а угол между векторами равен  $60^\circ$ .

6. Разложить вектор  $\vec{a} = (8; 1)$  по базисным векторам  $\vec{b} = \{1; 2\}$  и  $\vec{c} = \{3; 1\}$ .

7. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{p} = \vec{a} - 3\vec{b}$  и  $\vec{q} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$ , если их длины  $|a| = 4$ ,  $|b| = 3$ , а угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $60^\circ$ .

8. Найти скалярное произведение векторов  $(\vec{a} + 2i) \cdot (\vec{b} - 3j)$ , если  $\vec{a} = \{2;3\}$  и  $\vec{b} = \{-3; 5\}$ , где  $i$  и  $j$  - ортонормированные базисные вектора.

9. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} = \{3; 4; -2\}$  и  $\vec{b} = \{3; 5; 2\}$ .

10. Найти скалярное произведение векторов  $\vec{a} = \{3; 4; -2; 5; 0; 6\}$  и  $\vec{b} = \{-3; 4; 1; 5; 8; 2\}$ .

***Тема 2. Декартова система координат. Уравнение прямой на плоскости.***

**Содержание темы.** Координаты. Прямоугольная система координат. Координатные углы. Взаимное расположение линии и точки. Взаимное расположение двух линий. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении. Деление отрезка попалам. Площадь треугольника по вершинам его координат. Уравнение прямой, разрешённое относительно ординат. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Общее уравнение прямой. Построение прямой по её уравнению. Условия параллельности прямых. Пересечение прямых. Условие перпендикулярности прямых. Угол между двумя прямыми.

**Задания для самостоятельной работы**

1. Со станции ежедневно можно отправлять пассажирские и скорые поезда. Данные приведены в таблице.

Тип поезда	Количество вагонов в составе		
	плацкартных	купейных	мягких
Пассажирский	5	6	3
Скорый	8	4	1
Резерв вагонов	80	72	21

Записать в математической форме условия, не позволяющие превысить наличный парк вагонов при формировании пассажирских и скорых поездов, ежедневно отправляемых со станции. Построить на плоскости  $Oxy$  область допустимых вариантов формирования поездов.

2. Даны уравнения сторон треугольника  $3x - 4y + 24 = 0$  ( $AB$ ),  $4x + 3y + 32 = 0$  ( $BC$ ) и  $2x - y - 4 = 0$  ( $AC$ ). Составьте уравнения высоты и медианы, проведенные из вершины  $B$ .

3. Стороны  $AB$ ,  $BC$  и  $AC$  треугольника  $ABC$  соответственно заданы уравнениями:  $4x + 3y - 5 = 0$ ,  $x - 3y + 10 = 0$ ,  $x - 2 = 0$ . Определить координаты его вершин.

4. Даны уравнения двух сторон прямоугольника  $2x - 3y + 5 = 0$ ,  $3x + 2y - 7 = 0$  и одна из его вершин

$A(2;-3)$ . Составить уравнения двух других сторон этого прямоугольника.

5. Две стороны квадрата лежат на прямых  $5x - 12y - 65 = 0$ ,  $5x - 12y + 26 = 0$ . Вычислить его площадь.

6. Составить уравнение высоты  $AM$  и медианы  $BK$  треугольника  $ABC$ , с вершинами в точках  $A(-1; 2)$ ,  $B(3; 4)$ ,  $C(1; -4)$ .

7. Даны три точки:  $A_1(1, 2)$ ,  $A_2(2, 3)$  и  $A_3(0, 5)$ .

а) Постройте треугольник  $A_1A_2A_3$  и найдите его площадь;

б) Составьте уравнение прямой, проходящей через точки  $A_1A_2$ ,  $A_1A_3$ ,  $A_2A_3$ ;

в) Найдите расстояние между двумя точками  $A_1A_2$ ,  $A_1A_3$ ,  $A_2A_3$ .

8. Найти координаты точки  $M$ , делящей отрезок  $AB$  в отношении 2:3, если известны точки  $A(1;4)$ ;  $B(2;5)$ .

9. Найти угол между следующими прямыми:

1)  $y = 2x + 3$ ;  $y = \frac{1}{3}x + 2$ ;

2)  $y = 3x - 2$ ;  $3y = 5x + 4$ ;

3)  $2y + 3x + 5 = 0$ ;  $3y - 5x + 1 = 0$ .

**10.** Найти точки пересечения следующих прямых:

1)  $5y - x + 3 = 0$ ;  $2y + 3x + 1 = 0$ ;

2)  $y + 3x + 5 = 0$ ;  $6y - x + 4 = 0$ .

### ***Тема 3. Кривые второго порядка.***

**Содержание темы.** Алгебраические линии и их порядок. Окружность и её элементы. Эллипс и его элементы. Гипербола и его элементы. Парабола и его элементы.

### **Задания для самостоятельной работы**

**1.** Найти центр и радиус следующих окружностей:

1)  $x^2 + y^2 + 10x - 8y - 23 = 0$ ;

2)  $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$ ;

3)  $4x^2 + 9y^2 + 4x - 6y - 7 = 0$ .

2. Привести к каноническому виду уравнение кривой и определить его вид:  $4x^2 - 4x - y^2 + 2y + 1 = 0$ .

3. Привести к каноническому виду и определить тип кривой  $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$ .

4. Привести к каноническому виду уравнение кривой  $y^2 - 6y - 16x + 25 = 0$ . Определить её тип и вычислить основные параметры.

5. Привести к каноническому виду уравнение кривой  $4x^2 + 16x - y^2 + 18y - 49 = 0$ . Определить её тип, вычислить основные параметры.

6. Привести к каноническому виду уравнение кривой  $x^2 + 8x - 9y - 29 = 0$ . Определить её тип, вычислить основные параметры.

7. По каноническому уравнению кривой второго порядка определить тип кривой, определить её элементы и начертить её график:

1)  $x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0$ ;

2)  $x^2 + y^2 + 6x - 4y = 0$ ;

3)  $4x^2 + 4y^2 - 12x + 4y + 3 = 0$ ;

4)  $9x^2 + 5y^2 + 18x - 30y + 9 = 0$ .

8. Построить эллипс  $9x^2 + 25y^2 = 225$ . Найти: а)

полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения директрис.

**9.** Установить, что уравнение  $5x^2+9y^2-30x+18y+9=0$  определяет эллипс, найти его центр, полуоси, эксцентриситет и уравнения директрис.

**10.** Построить гиперболу  $16x^2-9y^2=144$ . Найти: а) полуоси; б) координаты фокусов; в) эксцентриситет; г) уравнения асимптот; д) уравнения директрис.

**11.** Установить, что уравнение  $16x^2-9y^2-64x-54y-161=0$  определяет гиперболу, найти ее центр  $C$ , полуоси, эксцентриситет, уравнения асимптот и директрис.

**12.** Построить параболу  $y^2=6x$  и найти ее параметры.

**13.** Установить, что уравнение  $y^2=4x-8$  определяет параболу. Найти координаты её вершины  $A$  и величину параметра  $p$ .

## **Раздел 5. Основы математического анализа**

***Тема 1. Понятие функции. Свойства и графики элементарных функций.***

**Содержание темы.** Понятие функции. Область изменения и область определения функции. Способы задания функции. Классификация и график элементарных функций. Понятие обратной и сложной функции.

### **Задания для самостоятельной работы**

**1.** Найти область определения функции:

$$1) y = \frac{x + 3}{x - 2};$$

$$2) y = \frac{x + 1}{2x - 5};$$

$$3) y = \sqrt{16 - x^2};$$

$$4) y = \sqrt{\frac{1 - x}{2 + x}};$$

$$5) y = \frac{3}{x^2 + 3x};$$

$$6) y = \frac{x - 1}{x^2 + 3x - 2};$$

$$7) y = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x}};$$

$$8) y = \frac{x + 12}{\sqrt{x^2 + 5x - 6}};$$

$$9) y = \frac{\sqrt{x + 2}}{x^2 - 4x};$$

$$10) y = \frac{\sqrt[4]{x + 1}}{x^2 + 5x};$$

$$11) y = \sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x - 2} + 2x - 1;$$

$$12) y = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}} + \sqrt{\frac{x-2}{x+6}} + x + 3;$$

$$13) y = \sqrt{x^2 + 2x + 1} + \sqrt{x^2 - 2x - 3};$$

$$14) y = \sqrt{x^2 + 5x + 4} + \sqrt{\frac{2x-3}{x+5}};$$

$$15) y = \log_2(x-4);$$

$$16) y = \ln\left(\frac{x+2}{3}\right);$$

$$17) y = \log_2\left(\frac{x-1}{x+2}\right);$$

$$18) y = \ln\left(\frac{3x-2}{x+1} - 1\right);$$

$$19) y = \log_3(x^2 - 4);$$

$$20) y = \lg(x^2 - 4x + 3);$$

$$21) y = \log_5 \sqrt{x^2 + 3x + 2};$$

$$22) y = \log_{12} \sqrt{\frac{x+2}{1-x}};$$

$$23) y = \log_x(x-4);$$

$$24) y = \log_{x-1}\left(\frac{x+2}{3}\right);$$

$$25) y = \arcsin \frac{x+2}{3};$$

$$26) y = \arccos \frac{2x+1}{4};$$

$$27) y = \arcsin \sqrt{x+1};$$

$$28) y = \arccos \sqrt{x-2};$$

$$29) y = \arcsin \frac{x+2}{x-1}; \quad 30) y = \arccos \frac{2x+1}{x}.$$

**2.** Найти область значения функции:

$$1) y = x^2 - 1; \quad 2) y = x^2 + 2x + 1;$$

$$3) y = x^2 + 2x; \quad 4) y = x^2 + 3x + 2;$$

$$5) y = 2^x - 1; \quad 6) y = 3^x + 2;$$

$$7) y = 10^x - 3; \quad 8) y = 7^{x+1} + 1;$$

$$9) y = 2\sin x; \quad 10) y = \sqrt{3}\cos x;$$

$$11) y = \sin x + \cos x; \quad 12) y = \sin x + \sqrt{3}\cos x.$$

$$13) y = 5\sin x + 4\cos x; \quad 14) y = 4\sin x + 3\cos x.$$

**3.** Построить график функции:

$$1) y = x + 3; \quad 2) y = 2x - 1; \quad 3) y = 2x + 5;$$

$$4) y = x^2 + 1; \quad 5) y = x^2 + 2x + 1;$$

$$6) y = x^2 + 4x + 3; \quad 7) y = 2x^2 - x + 1;$$

8)  $y = x^3 + 1$ ;

9)  $y = x^3 + x + 1$ ;

10)  $y = \sqrt{x + 1}$ ; 11)  $y = \sqrt{x - 2}$ ; 12)  $y = \sqrt{2x + 3}$ ;

13)  $y = 2\cos x$ ; 14)  $y = \sin x + 1$ ; 15)  $y = \sin x \cos x$ ;

16)  $y = 2^x$ ; 17)  $y = 2^{-x}$ ; 18)  $y = 3^x + 1$ ;

19)  $y = \log_2 x$ ; 20)  $y = \log_{\frac{1}{2}}(x + 3)$ ; 21)  $y = \ln x$ .

***Тема 2. Числовая последовательность и её предел.  
Предел функции. Замечательные пределы.***

**Содержание** темы. Предел числовой последовательности. Предел функции и его свойства. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции. Элементарные приёмы раскрытия неопределённостей разного вида. Первый замечательный предел. Второй замечательный предел.

**Задания для самостоятельной работы**

1. Показать, что

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n + 1}{2n - 1} = \frac{3}{2}$ ;

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{2n - 1} = \frac{1}{2}$ ;

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n + 1}{5n + 3} = \frac{4}{5}; \quad 4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n + 1}{n} = 1.$$

2. Найти пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - x - 2}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4}{2x^2 - x - 2};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x}; \quad 5) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{3n + 2}{3n + 5} \right)^{2n+1}; \quad 6) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x+12} - \sqrt{20-x}}{x-4}.$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^3 - x}; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4}; \quad 9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^3 - 8};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 2}{4x^3 + x}; \quad 11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^5 + 3x^4 + 1}{x^3 + 6x + 2}; \quad 12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5x}{3x^3 + x^2};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{x^2 - 8x}; \quad 14) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 3x}; \quad 15) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 2x^2 - 8x};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sin 5x}; \quad 17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7x}{\sin 5x};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin \left( x - \frac{\pi}{2} \right)}{\sin \left( 3x - \frac{3\pi}{2} \right)}; \quad 19) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{\frac{x+2}{x}};$$

20)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{n+3}{n+4} \right)^n$  ;

21)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{1}{2x}}$ ;

22)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x})$ ;

23)  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{\sqrt{4-x} - 1}$ ;

24)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x^2 - x}$  ;

25)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$  ;

26)  $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$ ;

27)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x}$ .

### ***Тема 3. Непрерывность функции. Разрывы.***

**Содержание темы.** Понятие непрерывности функции в точке. Непрерывность функции в области. Понятие разрыва функции. Классификация точек разрыва: устранимая точка разрыва; точка разрыва первого рода; точка разрыва второго рода. Свойства непрерывных функций.

#### **Задания для самостоятельной работы**

1. Доказать непрерывность следующих функций:

1)  $y = x^2$ ;

2)  $y = x^3$ ;

3)  $y = x^2 + x$ ;

$$4) y = \sin x; \quad 5) y = \cos x; \quad 6) y = \sin x \cos x;$$

$$7) y = e^x; \quad 8) y = \ln x, x > 0; \quad 9) y = \sqrt{x}, x \geq 0;$$

2. Исследовать на непрерывность и найти точки разрыва функции:

$$1) f(x) = \begin{cases} \frac{|x-2|}{x-2}x + 1 & \text{при } x \neq 2, \\ 2 & \text{при } x = 2; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \frac{1}{2^{x-1}}; \quad 3) f(x) = \frac{x^2}{x-3}; \quad 4) f(x) = \frac{10}{x^3-x};$$

$$5) f(x) = \begin{cases} x^3 + 1 & \text{при } x \neq 0, \\ 3 & \text{при } x = 0; \end{cases} \quad 6) f(x) = \frac{\cos x}{x}.$$

#### ***Тема 4. Производная функции и её применения. Исследование функции.***

**Содержание темы.** Определение производной. Формулы производной элементарных функций. Основные правила дифференцирования. Производная обратной функции. Производная неявных функций. Дифференциал функции. Геометрический и физический смысл производной. Уравнения касательной и нормали. Правило Лопиталя. Возрастание и убывание функций. Максимумы и минимумы функций. Необходимое и

достаточное условия существования экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функций на замкнутом интервале. Асимптоты графика функции. Схема исследования функции.

### Задания для самостоятельной работы

1. Найти производную функции:

1)  $y = x^5 + 3x^2 + 3$ ;      2)  $y = 3x^4 - 2x^2 + 3x + 1$ ;

3)  $y = \frac{1}{5}x^5 + 2x^2 + 7$ ;      4)  $y = 3x^{\frac{1}{3}} - \frac{1}{2}x^2 + \pi$ ;

5)  $y = \sqrt{x} + \sin x + \operatorname{ctg} x$ ;      6)  $y = \cos x + 2 \operatorname{tg} x$ ;

7)  $y = \cos x + 2 \operatorname{tg} x$ ;      8)  $y = \log_2 x + \frac{1}{3}x^6$ ;

9)  $y = \ln x + \sin x + e^x$ ;      10)  $y = \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$ .

2. Найти производную функции:

1)  $y = (x + 2)e^x$ ;      2)  $y = \frac{x+3}{x-1}$ ;      3)  $y = (x^3 - 2x)\sin x$ ;

4)  $y = (x + 2)(x + 3)$ ;      5)  $y = (x^2 + 1)(x^3 - 2)$ ;

6)  $y = \ln x(x + 2)$ ;      7)  $y = (\sin x + \cos x)(\sin x - \cos x)$ ;

$$8) y = \frac{x^2-1}{x+2}; \quad 9) y = \frac{x^2+1}{x+3}; \quad 10) y = \frac{x^2+2x+3}{x^2-2x-3};$$

$$11) y = \frac{\ln x-1}{x+2}; \quad 12) y = \frac{\sin x-1}{\sin x+2}; \quad 13) y = \frac{\cos x+1}{\cos x-1}.$$

**3.** Найти производную сложной функции:

$$1) y = \sin(2x + 1) + \cos 2x; \quad 2) y = \cos^2 x;$$

$$3) y = e^{x+2} + \ln(x + 2); \quad 4) y = e^{x^2+3x+2};$$

$$5) y = \sqrt{\sin(2x + 1)}; \quad 6) y = \sqrt{x + \sqrt{x}};$$

$$7) y = \operatorname{tg}^2(x + 2) + \sqrt{x^2 + 1}; \quad 8) y = \operatorname{ctg}^2 x - \sqrt{x^2 - 1};$$

$$9) y = \ln(\sqrt{x^2 + 1} - 1); \quad 10) y = \operatorname{tg}(\sqrt{x + 1} - 1).$$

**4.** Составить уравнения касательной и нормали к кривой  $y = x^3 + 2x$  в точке с абсциссой  $x=1$ .

**5.** Составить уравнения касательной и нормали к кривой  $y = x^4 + 3x$  в точке с абсциссой  $x=2$ .

**6.** Составить уравнения касательной и нормали к кривой  $y = x^3 + 2x$  в точке с абсциссой  $x=1$ .

7. В какой точке касательная к параболе  $y = x^2 - 3x + 7$  перпендикулярна прямой  $y = \frac{1-x}{3}$ ?

8. В какой точке касательная к параболе  $y = x^2 + 3x - 5$  параллельна прямой  $7x - y + 3 = 0$ ?

9. Составить уравнения касательной и нормали к кривой, заданной уравнением  $4x^3 - 3xy^2 + 6x^2 - 5xy - 8y^2 + 9x + 14 = 0$ , в точке  $M_0(-2;3)$ .

10. Составьте уравнение касательной к графику функции  $y = x \ln x$ . В какой точке эта касательная: а) параллельна прямой  $y = 2x - 5$ ; б) перпендикулярна прямой  $y = x + 3$ .

11. Найти предел с помощью правила Лопиталя:

1)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - x}$ ; 2)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin x}{x}$ ; 3)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x^2}$ ;

4)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x}$ ; 5)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$ ; 6)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{10} - 1}{2x^8 - 2}$ ;

7)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left( e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$ ; 8)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x$ ; 9)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{x+1}$ ;

$$10) \lim_{x \rightarrow +0} x^x; \quad 11) \lim_{x \rightarrow +0} x e^{\frac{1}{x}}; \quad 12) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\operatorname{tg} x)^{\cos x}.$$

**12.** Найти интервалы возрастания и убывания следующих функций:

$$1) y = x^2 + 2x + 7; \quad 2) y = 2x^2 + 5x - 3;$$

$$3) y = x^3 - 3x + 2; \quad 4) y = 2x^3 - x^2 + 2;$$

$$5) y = 2x^2 - \ln x; \quad 6) y = x + \cos x; \quad 7) y = \frac{x}{\ln x};$$

$$8) y = x + \sin x; \quad 9) y = x e^{-x}; \quad 10) y = \frac{2-x^2}{x}.$$

**13.** Исследовать на экстремум следующие функции:

$$1) y = 3x^2 + 12x; \quad 2) y = x^3 - 3x^2 - 9x;$$

$$3) y = (x - 1)^3(x + 1)^2; \quad 4) y = x - \ln(x + 1);$$

$$5) y = x \ln x; \quad 6) y = e^x + e^{-x}; \quad 7) y = \frac{x^2}{x-2};$$

$$8) y = x + \cos 2x, \quad x \in (0; \pi); \quad 9) y = x \ln x; \quad 10) y = \frac{\ln x}{x}.$$

**14.** Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке (1-12):

$$1) y = x^2 + 2x + 3, \quad x \in [-1; 3];$$

$$2) y = -x^2 + 4x + 1, \quad x \in [-2; 2];$$

$$3) y = -x^3 + 4x^2 - 5x, \quad x \in [-2; 1];$$

$$4) y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1, \quad x \in [-1; 2];$$

$$5) y = x^4 - 2x^2 + 1, \quad x \in [-2; 3];$$

$$6) y = x^4 + x^3 - \frac{1}{2}x^2, \quad x \in [-2; 0];$$

$$7) y = \frac{x^2 + 1}{x - 1}, \quad x \in [2; 3];$$

$$8) y = \frac{x + 1}{x^2 + 1}, \quad x \in [0; 3];$$

$$9) y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}, \quad x \in [-1; 3];$$

$$10) y = \sqrt{x} - x, \quad x \in [0; 4];$$

$$11) y = \sqrt{x} - x^2, \quad x \in [1; 9];$$

$$12) y = \frac{\ln x}{x}, \quad x \in (0; +\infty).$$

13) Число 10 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их кубов была бы наименьшей.

14) Число 18 разбить на два таких слагаемых, чтобы сумма их квадратов была бы наименьшей.

15) Разбить число 12 на два слагаемых, произведение которых имело бы максимальное значение.

**15.** Найти асимптоты кривой:

$$1) y = \frac{x}{x^2 - 1}; \quad 2) y = \frac{x^2 + 1}{2x + 3}; \quad 3) y = \sqrt{x^2 + 1};$$

$$4) y = \frac{\sin x}{x}; \quad 5) y = xe^{\frac{1}{x^2}}; \quad 6) y = \frac{\ln(x + 1)}{x}.$$

**16.** Провести исследование функции и построить её график:

$$1) y = x^2 + 3x + 2; \quad 2) y = \frac{x}{x - 1};$$

$$3) y = x + \frac{\ln x}{x}; \quad 4) y = x^2 e^{-x};$$

5)  $y = e^{\frac{1}{x}} - x;$

6)  $y = \frac{(x - 1)^2}{(x + 1)^2};$

7)  $y = \sin x \cos x;$

8)  $y = \sin x + \cos x.$

**Тема 5. Первообразная функции и неопределённый интеграл.**

**Содержание темы.** Первообразная функции. Неопределённый интеграл и его свойства. Таблица неопределённых интегралов. Основные методы интегрирования: метод замены переменной; метод интегрирования по частям.

**Задания для самостоятельной работы**

**1.** Найти интегралы:

1)  $\int (5x^4 + 3x^2 + 1)dx;$

2)  $\int \left(\frac{3}{5}x^2 + 2x + 1\right) dx;$

3)  $\int (7x^6 + 5x^4 + 1)dx;$

4)  $\int (x^2 + 3x + e)dx;$

5)  $\int \frac{x^2 + 3}{x} dx;$

6)  $\int \frac{x^3 + 3x^2 + 2x + 1}{x} dx;$

$$7) \int (\sqrt{x} + e^x - 2) dx; \quad 8) \int (x^4 - x^2 + \sqrt[3]{x}) dx;$$

$$9) \int (\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}) dx; \quad 10) \int \left( \frac{3}{4} \sqrt[3]{x} + \frac{3}{2} \sqrt{x} \right) dx;$$

$$11) \int (\sin x + \cos x + \pi) dx; \quad 12) \int (2 \sin x - 3 \cos x) dx;$$

$$13) \int \left( \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{4}{\cos^2 x} \right) dx; \quad 14) \int \frac{1}{\sin^2 \cos^2 x} dx;$$

$$15) \int (2^x + 3^x) dx; \quad 16) \int \frac{3^x + 5^x}{7^x} dx.$$

**2. Найти интегралы:**

$$1) \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 5}; \quad 2) \int \sin(5x + 3) dx; \quad 3) \int x \cos x dx;$$

$$4) \int \operatorname{tg} x dx; \quad 5) \int \ln x dx; \quad 6) \int \sin^3 x dx.$$

$$7) \int x \sin x dx; \quad 8) \int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx; \quad 9) \int \frac{dx}{\cos x \sin x};$$

$$10) \int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx; \quad 11) \int \cos x \sin x dx; \quad 12) \int \frac{dx}{\cos x};$$

$$13) \int x^2 \sin x dx; \quad 14) \int x^2 \cos x dx; \quad 15) \int \frac{dx}{\sin x};$$

$$16) \int x^3 \sin x dx; \quad 17) \int e^x \cos x dx; \quad 18) \int e^x \sin x dx;$$

$$19) \int x e^{x^2} dx; \quad 20) \int \frac{\ln x}{x} dx; \quad 21) \int \frac{\ln^3(x+3)}{x+3} dx.$$

### ***Тема 6. Определённый интеграл и его применения.***

**Содержание темы.** Понятие определённого интеграла и его основные свойства. Формула Ньютона - Лейбница. Метод замены переменной. Метод интегрирования по частям. Площадь криволинейной трапеции.

### **Задания для самостоятельной работы**

**1.** Вычислить определённые интегралы:

$$1) \int_1^2 (3x^2 + 2x + 1) dx; \quad 2) \int_{-2}^2 (5x^4 + 3x^2 + 1) dx;$$

3)  $\int_1^4 \left( x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + 2 \right) dx;$

4)  $\int_{-1}^1 (6x^5 + 4x^3) dx;$

5)  $\int_1^2 \left( \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x \right) dx;$

6)  $\int_1^2 (x^4 + x^2 + 2) dx;$

7)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\sin x + 3\cos x) dx;$

8)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin 2x + \cos 3x) dx;$

9)  $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x + 1) dx;$

10)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(3x + 2) dx;$

11)  $\int_1^2 (e^{x+2} + 2x) dx;$

12)  $\int_1^2 (2^{x+2} - 3x^2) dx;$

13)  $\int_1^2 \frac{x+2}{x} dx;$

14)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx;$

15)  $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx;$

16)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg} x dx;$

17)  $\int_0^1 x e^{x^2} dx;$

18)  $\int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx.$

$$19) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos 2x dx; \quad 20) \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x + 1}}; \quad 21) \int_1^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin x;$$

$$22) \int_0^{\frac{\pi}{6}} e^x \cos x; \quad 23) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{ctg} x; \quad 24) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \cos x;$$

$$25) \int_0^1 \operatorname{arctg} x; \quad 26) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx; \quad 27) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 x;$$

$$28) \int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}; \quad 29) \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx; \quad 30) \int_1^e x^2 \ln x dx.$$

**2.** Найти площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

$$1) y = -x^2, \quad y = 0, \quad x = 1, \quad x = 2;$$

$$2) y = x^2, \quad y = 4; \quad 3) y = \sqrt{x}; \quad y = 0; \quad x = 2;$$

$$4) y = x^2 - 4x, \quad y = x; \quad 5) y = x^2, \quad y = 0, \quad x = 3;$$

$$6) y = x^3, y = 1, x = 0; \quad 7) y = \frac{x}{3}, y = x, x = 1;$$

$$8) y = \sqrt{x}, y = 3, x = 0; \quad 9) y = x^2; y = x^3;$$

$$10) y = 2\cos x, y = 1, \quad x = -\frac{\pi}{3}; \quad x = \frac{\pi}{3};$$

$$11) y = 2\sin x, y = \frac{1}{2}, \quad x = \frac{\pi}{6}; \quad x = \frac{5\pi}{6};$$

$$12) y = 4x - x^2, y = 0; \quad 13) y = x^2 - 7x + 10, y = 0;$$

$$14) y = 3 - 2x - x^2, \quad y = 1 - x;$$

$$15) y = x^2, y = 2x^2 - 1; \quad 16) y = x^2, y = 2 - x;$$

$$17) y = e^x, y = 0, \quad x = -1, \quad x = 1;$$

$$18) y = 2^x, y = 4^x, \quad x = 1;$$

$$19) y = 3^x, y = 9^x, \quad x = 1;$$

$$20) y = e^x, y = e^{2x}, \quad x = 1.$$

## **Раздел 6. Основы теории вероятностей и математической статистики**

### ***Тема 1. Случайные события. Понятие вероятности. Основные теоремы и формулы.***

**Содержание темы.** Случайные события и их алгебра. Классическое, статистическое и геометрическое определение вероятности. Теорема сложения вероятностей. Теорема умножения вероятностей. Следствия теорем сложения и умножения. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Формула Бернулли. Наивероятнейшее число.

### **Задания для самостоятельной работы**

**1.** В ящике имеется 50 одинаковых деталей, из них 5 окрашенных. Наудачу вынимают одну деталь. Найти вероятность того, что извлеченная деталь окажется окрашенной?

**2.** Монета подброшена два раза. Какова вероятность того, что оба раза выпадет «герб»?

**3.** Два стрелка произвели по одному выстрелу по мишени. Вероятность поражения цели каждым из стрелков равна 0,8. Найти вероятность того, что: а) оба стрелка поразят цель; б) оба стрелка промахнутся; в)

только один стрелок поразит мишень; г) хотя бы один стрелок поразит мишень.

**4.** Наудачу взяты два положительных числа  $x$  и  $y$ , каждое из которых не превышает единицы. Найти вероятность того, что сумма  $x + y$  не превышает единицы, а произведение  $xy$  не меньше  $0,16$ .

**5.** Имеется колода из 52 игральные карт. Из колоды наудачу вынимают одну карту. Какова вероятность, что будет вынута или козырная карта или дама?

**6.** В магазин для продажи поступает продукция трех фабрик, относительные доли которых есть: I-50%, II-30%, III-20%. Для продукции фабрик брак соответственно составляет: I-2%, II-3%, III-5%. Какова вероятность того, что изделие этой продукции, случайно приобретенное в магазине, окажется доброкачественным (событие  $A$ )?

**7.** Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна  $0,5$ , для второго -  $0,3$ ; для третьего -  $0,6$ . Мишень не поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены первым стрелком.

**8.** Вероятность выигрыша по одному лотерейному

билету равна 0,4. Вы купили 8 билетов. Найти вероятность того, что хотя бы один билет выигрышный.

9. При автоматической наводке орудия вероятность попадания по быстро движущейся цели равна 0,9. Найти наивероятнейшее число попаданий при 50 выстрелах.

10. Вероятность того, что родившийся ребенок – мальчик, равна 0,51. Какова вероятность того, что в семье из шести детей: одна или две девочки.

## ***Тема 2. Случайные величины и их числовые характеристики. Функции и законы распределения.***

**Содержание темы.** Понятие случайной величины. Случайная дискретная величина и ее закон распределения. Числовые характеристики дискретной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение. Непрерывная случайная величина и функция ее распределения. Плотность вероятности. Числовые характеристики непрерывной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратичное отклонение.

### **Задания для самостоятельной работы**

1. Манету бросают 4 раза. Составить закон

распределения случайной величины  $X$  - числа выпадений герба.

2. Выпущено 1000 латерейных билетов: на 5 из них выпадает выигрыш в сумме 500 рублей, на 10 - выигрыш в 100 рублей, на 20 - выигрыш в 50 рублей, на 50 - выигрыш в 10 рублей. Определить закон распределения вероятностей случайной величины  $X$  - выигрыша на один билет.

3. Закон распределения дискретной случайной величины задан следующей таблицей:

X	-2	1	3	4	5
P	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение данной случайной величины.

4. Функция распределения непрерывной случайной величины имеет следующий вид:

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ x^4, & 0 < x \leq 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Найти функцию плотности, математическое ожидание и дисперсию данной случайной величины.

5. Случайная величина  $X$  задана таблицей распределения

X	3	4	7	10
P	0,2	0,1	0,4	0,3

Определив функцию распределения  $X$ , постройте ее график.

### ***Тема 3. Основы математической статистики.***

**Содержание темы.** Задачи математической статистики. Генеральная и выборочная совокупности. Виды выборки. Способы отбора. Статистическое распределение выборки. Эмпирическая функция распределения выборки. Полигон. Гистограмма. Элементы теории корреляции. Функциональная, статистическая и корреляционная зависимость. Условные средние. Выборочные уравнения регрессии. Отыскание параметров эмпирических формул.

### **Задания для самостоятельной работы**

1. Задано распределение частот выборки объема  $n=30$ :

$x_i$	3	5	7	9	11
$n_i$	4	6	7	5	8

Написать распределение относительных частот.

2. Построить эмпирическую функцию по данному распределению выборки:

$x_i$	2	6	10
$n_i$	12	18	30

3. Построить график эмпирической функции распределения

$x_i$	3	5	7	12
$n_i$	2	3	8	7

4. Построить полигоны частот и относительных частот распределения

$x_i$	1	3	5	7	9
$n_i$	10	15	30	33	12

5. Построить гистограммы частот и относительных частот распределения (в первом столбце указан частичный интервал, во втором - сумма частот вариант частичного интервала):

2-5	9
5-8	10

8-11	25
11-14	6

6. Найти выборочное уравнение прямой линии регрессии  $Y$  на  $X$  по данным  $n=5$  наблюдений:

1)

$x_i$	1	1,5	3	4,5	5
$n_i$	1,25	1,4	1,5	1,75	2,25

2)

$x_i$	1	2	3	4	5
$n_i$	2	3	4	5	6

3)

$x_i$	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
$n_i$	4,66	5	5,3	6,2	8,92	9,43	10,75	10,92

## §8. Формы и методы оценивания освоения учебной дисциплины

Предметом оценки являются знания, умения и владения (см. таблицу 2). Контроль и оценка осуществляются с использованием следующих форм и методов: оценивание знаний, умений и владений при

текущем, промежуточном и итоговом контроле производится по пятибалльной системе. В случае 100 балльной системы, перевод в пятибалльную шкалу (а также в систему зачёт/незачёт) осуществляется по следующему правилу:

$0 \leq Б < 50$  — неудовлетворительно (незачёт);

$50 \leq Б < 75$  — удовлетворительно (зачёт);

$75 \leq Б < 90$  — хорошо (зачёт);

$90 \leq Б \leq 100$  — отлично (зачёт).

Текущие знания проверяются с помощью опроса и контрольных работ в рамках занятий, промежуточное и итоговое знания оцениваются на зачёте и экзамене во время экзаменационной сессии.

**Таблица 2.**

Элементы учебной дисциплины (разделы/темы)	Проверяемые компетенции	Показатели оценки результата	Форма и метод контроля
<b>Раздел 1. Введение. Множества и операция над ними</b>			
Тема 1. Место и роль математики в современном мире. Понятие множества, индукции и дедукции. Теоремы,	УК-1, УК-6	знание места, роли и области применения математики; понятия множества, индукции, дедукции, теоремы,	Опрос, проверка домашнего задания

<p>аксиомы, определения и аксиоматический метод</p>		<p>аксиомы и определения;  <b>умение</b> решать простые задачи, связанные с перечисленными понятиями;  <b>владение</b> навыками правильной формулировки и решения задач с помощью перечисленных понятий.</p>	
<p><b>Тема 2.</b>  Числовые множества.  Операции над множествами</p>	<p>УК-1,УК-6</p>	<p><b>знание</b> числовых множеств и операций над ними;  <b>умение</b> решать элементарные задачи теории множеств;  <b>владение</b> различными приемами и методами решения задач теории множеств и применением</p>	<p>Опрос, проверка домашнего задания</p>

		понятия множества при решении других задач	
<b>Раздел 2. Дискретная математика</b>			
<b>Тема 1.</b> Элементы комбинаторики	УК-1,УК-6	<b>знание</b> основных понятий комбинаторики, такие как перестановки, размещения и сочетания; <b>умение</b> решать элементарные задачи на комбинаторику; <b>владение</b> различными приемами и методами решения задач комбинаторики.	Опрос, проверка домашнего задания
<b>Раздел 3. Основы линейной алгебры</b>			
<b>Тема 1.</b> Матрицы и действия над ними. Определители и их свойства	УК-1,УК-6	<b>знание</b> понятия матрицы и действий над ними; понятия определителя и его свойств; <b>умение</b> решать	Опрос, проверка домашнего задания

		<p>простые задачи, связанные с выполнением действий над матрицами, вычислением определителей второго и третьего порядка, нахождением ранга матрицы и обратной матрицы;</p> <p><b>владение</b> различными приемами и методами решения задач теории матриц и определителей; навыками применения теории матриц и определителей при решении других задач.</p>	
<p><b>Тема 2.</b> Системы линейных алгебраических</p>	УК-1, УК-6	<p><b>знание</b> понятия систем линейных алгебраических</p>	<p>Опрос, проверка домашнего задания,</p>

уравнений		уравнений, методов решения (метода Гаусса, правила Крамера, метода обратной матрицы), а также их области применения; <b>умение</b> решать системы линейных алгебраических уравнений тремя способами; <b>владение</b> навыками применения систем линейных алгебраических уравнений при решении других задач.	контроль ная работа
<b>Раздел 4. Элементы аналитической геометрии</b>			
<b>Тема 1.</b> Векторы. Линейные операции над векторами	УК-1,УК-6	<b>знание</b> понятия вектора, линейных операций над векторами и	Опрос, проверка домашнего задания

		<p>скалярного произведения векторов;</p> <p><b>умение</b> решать задачи, связанные с понятием вектора;</p> <p><b>владение</b> техникой применения вектора к решению других задач.</p>	
<p><b>Тема 2.</b> Декартова система координат. Уравнение прямой на плоскости</p>	УК-1,УК-6	<p><b>знание</b> понятия декартовой системы координат, отчисления точек на координатной плоскости, различных видов уравнения прямой и других понятий, связанных с декартовой системой координат;</p> <p><b>умение</b> отмечать точки на</p>	Опрос, проверка домашнего задания

		<p>координатной плоскости, находить координаты точки, делящей отрезок в заданном отношении, вычислять расстояние между двумя точками, составлять уравнение прямой, построить прямую линию на плоскости, находить точки пересечения линий;</p> <p><b>владение</b> различными приемами и методами решения задач, связанных с декартовой системой координат и уравнением прямой;</p>	
--	--	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

		<p>навыками применения декартовой системы координат и уравнения прямой при решении других задач.</p>	
<p><b>Тема 3.</b> Кривые второго порядка</p>	<p>УК-1, УК-6</p>	<p><b>знание</b> понятия кривых второго порядка, эллипса, гиперболы, параболы и их элементов;  <b>умение</b> решать элементарные задачи, связанные с кривыми второго порядка;  <b>владение</b> навыками анализа между кривыми первого и второго порядка; применением кривых второго порядка при решении других</p>	<p>Опрос, проверка домашнего задания</p>

		задач.	
<b>Раздел 5. Основы математического анализа</b>			
<b>Тема 1.</b> Понятие функции. Свойства и графики элементарных функций	УК-1,УК-6	<b>знание</b> понятий функции и графика; свойств элементарных функций; <b>умение</b> находить области определения и изменения функции; исследовать функцию на четность и нечетность; построить график элементарных функций; <b>владение</b> навыками применения функции в других областях науки.	Опрос, проверка домашнего задания
<b>Тема 2.</b> Числовая последовательность и её	УК-1,УК-6	<b>знание</b> понятия числовой последовательности и её предела;	Опрос, проверка домашнего задания

<p>предел. Предел функции. Замечательные пределы</p>		<p>предела функции; основных формул теории пределов; <b>умение</b> находить пределы с помощью определения и известных формул; <b>владение</b> различными приемами и методами нахождения предела последовательностей и функций; навыками применения теории пределов при решении других задач.</p>	
<p><b>Тема 3.</b> Непрерывность функции. Разрывы</p>	<p>УК-1,УК-6</p>	<p><b>знание</b> понятия непрерывности функции в точке и области; свойств непрерывных</p>	

		<p>функций;  разрыва  функции;  <b>умение</b> понять  сущность  непрерывности  функции;  исследовать  функцию на  непрерывность;  классифицирова  ть точки разрыва  функции;  составлять  примеры;  <b>владение</b>  навыками  исследования  функций на  непрерывность.</p>	
<p><b>Тема 4.</b>  Производная  функции и ее  применения.  Исследование  функции</p>	УК-1,УК-6	<p><b>знание</b> понятия  производной;  основных  формул  нахождения  производной;  схемы  исследования  функции с  помощью  производной;</p>	<p>Опрос,  проверка  домашнег  о задания</p>

		<p><b>умение</b> находить производную функции с помощью определения и необходимых формул; исследовать функцию с помощью производной;</p> <p><b>владение</b> техники нахождения производной сложной функции; навыками применения производной при решении других задач.</p>	
<p><b>Тема 5.</b> Первообразная функции и неопределённый интеграл</p>	УК-1, УК-6	<p><b>знание</b> понятия первообразной функции и неопределённого интеграла; свойств неопределённого интеграла и</p>	Опрос, проверка домашнего задания

		<p>основных методов интегрирования; таблицы неопределенных интегралов;</p> <p><b>умение</b> находить неопределенные интегралы;</p> <p><b>владение</b> различными приемами и методами нахождения неопределенных интегралов.</p>	
<p><b>Тема 5.</b> Определённый интеграл и его применения</p>	УК-1,УК-6	<p><b>знание</b> определения определенного интеграла; формулы Ньютона-Лейбница; свойств и основных методов определенного интеграла; области применения</p>	<p>Опрос, проверка домашнего задания</p>

		<p>определенного интеграла;  <b>умение</b>  вычислять табличные определенные интегралы;  использовать основные методы интегрирования при вычислении определенного интеграла;  <b>владение</b>  различными приемами и методами нахождения определенных интегралов;  навыками применения определенного интеграла при решении других задач.</p>	
<b>Раздел 6. Основы теории вероятностей и математической статистики</b>			
<b>Тема 1.</b> Случайные	УК-1,УК-6	<b>знание</b> понятия случайных	Опрос, проверка

<p>события.          Понятие вероятности.          Основные теоремы и формулы</p>		<p>событий;          классического определения вероятности, статистической и геометрической вероятностей; теорем сложения и умножения вероятностей; формул полной вероятности и Байеса; формулы Бернулли;  <b>умение</b> решать элементарные задачи с помощью необходимых формул и теорем теории вероятностей;  <b>владение</b> различными методами вычисления вероятностей; навыками применения необходимых</p>	<p>домашнег          о задания</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------	--	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------

		теорем и формул при решении различных задач.	
<b>Тема 2.</b> Случайные величины и их числовые характеристики . Функции и законы распределения	УК-1,УК-6	<b>знание</b> понятия и видов случайных величин; основных законов распределения вероятностей; числовых характеристик случайных величин; <b>умение</b> использовать законы распределения при решении конкретных задач; вычислять числовые характеристики случайных величин; <b>владение</b> навыками использования законов распределения и числовых характеристик при решении различных задач.	Опрос, проверка домашнего задания

<p><b>Тема 3. Основы математической статистики</b></p>	<p>УК-1,УК-6</p>	<p><b>знание</b> задач и основных понятий математической статистики;  <b>умение</b> выделять задачи математической статистики; построить график эмпирической функции распределения, полигоны и гистограммы частот и относительных частот;  <b>владение</b> навыками о применении методов математической статистики при решении прикладных задач.</p>	<p>Опрос, проверка домашнего задания, контрольная работа</p>
--------------------------------------------------------	------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------

**Знания студентов оцениваются по шкалам и критериям, представленным ниже:**

**Таблица 3.**

<b>Шкала и критерии оценивания результатов обучения (РО) по дисциплине (модулю)</b>				
<b>Оценка РО и соответствующие виды оценочных средств</b>	<b>2</b> оценку "неудовлетворительно" заслуживает студент, продемонстрировавший:	<b>3</b> оценку "удовлетворительно" заслуживает студент, продемонстрировавший:	<b>4</b> оценку "хорошо" заслуживает студент, продемонстрировавший:	<b>5</b> оценку "отлично" заслуживает студент, продемонстрировавший:
<b>Знания</b> <i>(оценка устных ответов)</i>	Незнание основных (базовых) терминов, определений методов и формул, незнание основной литературы	Неглубокое знание основных (базовых) терминов, определений, знание основной литературы	Хорошее знание и понимание пройденного учебного материала, знание и понимание основной литературы.	Отличное знание и глубокое понимание пройденного учебного материала, знание и понимание основной и дополнительной литературы

				ы
<b>Умени я</b> (оценка выполн ения практи ческих контро льных заданий )	Наличие серьёзных ошибок при выполнени и практическ ого задания	В целом успешное, но основанно е на неглубоко м понимании целей, частичное выполнени е практическ ого задания	В целом успешное, основанно е на понимании , но содержаще е отдельные пробелы умение (допускаю тся неточност и непринцип иального характера)	Качествен но выполнени е практическ ого задания и контрольн ой работы
<b>Навык и</b> (владен ия, опыт деятель ности)	Отсутстви е навыков	Наличие отдельных навыков	В целом, сформиров аны навыки (владения), но используе мые в неактивно й форме	Сформиро ванные навыки (владения), применяем ые при решении и формулиро вке задач

## **§9. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов, оценочные средства контроля успеваемости и промежуточной аттестации**

**Учебно-методические рекомендации для обеспечения самостоятельной работы студентов:** изучение полученных на лекциях материалов, выполнение домашних заданий, работа с литературой и самостоятельный поиск материалов в сети Интернет.

Самостоятельная работа студентов (СРС) является неотъемлемой составной частью учебного процесса. Задача преподавателя - прививать студентам умение самостоятельно пополнять знания по изучаемой дисциплине, ориентироваться в потоке информации. Под СРС понимается часть учебной планируемой работы, которая выполняется по заданию и при методическом руководстве преподавателя, но без его непосредственного участия.

После изучения тем лекционного раздела дисциплины преподавателем проводится опрос студентов (перед началом следующей новой темы) по тематике вопросов для самоконтроля. Полученные в ходе самостоятельной проработки знания понадобятся студенту при проверке знаний - промежуточном и итоговом тестировании.

Самостоятельная работа проводится с целью:  
– систематизации и закрепления полученных

- теоретических знаний студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
  - развития познавательных способностей и активности студентов, самостоятельности, ответственности и организованности;
  - формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Самостоятельные работы следует выполнять в отдельной тетради. На тетради должны быть написаны: фамилия, инициалы студента, курс и направление подготовки.

Преподаватель может каждому студенту по каждой теме давать индивидуальные задания. В случае групповых заданий при приёме работ преподаватель должен убедиться в том, что студент сам выполнял задания.

### **Примеры заданий для проведения текущей, промежуточной и итоговой аттестации**

#### ***а) Образец варианта контрольной работы для первого семестра***

1. Даны множества  $A=\{1, 2,5,8, 4\}$ ,  $B=\{2, 3,5,7, 11\}$ .  
Требуется найти:

1)  $A \cup B$ , 2)  $A \cap B$ , 3)  $A/B$ , 4)  $A \Delta B$ .

(≤20 б.)

**Решение.** Для решения этой задачи мы должны знать определение объединения, пересечения, разности и симметричной разности двух множеств.

*Объединением (суммой)* множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \cup B$ , элементы которого принадлежат хотя бы одному из этих множеств:

$$A \cup B = \{1, 2, 5, 8, 4, 3, 7, 11\}.$$

*Пересечением (произведением)* множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \cap B$ , элементы которого принадлежат как множеству  $A$ , так и множеству  $B$ :

$$A \cap B = \{2, 5\}.$$

*Разностью* множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \setminus B$ , элементы которого принадлежат множеству  $A$ , но не принадлежат множеству  $B$ :

$$A \setminus B = \{1, 8, 4\}.$$

*Симметричной разностью* множеств  $A$  и  $B$  называется множество  $A \Delta B$ , являющееся объединением разностей множеств  $A \setminus B$  и  $B \setminus A$ :

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{1, 8, 4\} \cup \{3, 7, 11\} = \{1, 8, 4, 3, 7, 11\}.$$

**2.** В пассажирском поезде 12 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 5 человек, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

( $\leq 20$  б.)

**Решение.** Так как все пассажиры должны ехать в разных вагонах, требуется отобрать 5 вагонов из 12 с

учетом порядка (вагоны отличаются номером). Эти выборки есть размещения из 5 различных элементов по 12 элементов. Формула размещений в общем случае такова:

$$A_n^m = n(n-1)(n-2) \dots (n-m+1).$$

Для нашего случая  $n=12$  и  $m=5$ . Подставляя эти числа в приведённую формулу, получим:

$$\begin{aligned} A_{12}^5 &= 12(12-1)(12-2)(12-3)(12-4) = \\ &= 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 665280. \end{aligned}$$

**Ответ:** 665280 способами можно рассадить в поезде 5 человек из 12.

**3. Найти ранг следующей матрицы:**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

(≤20 б.)

**Решение.** Найдем ранг данной матрицы с помощью метода Гаусса, т.е. приведем эту матрицу в ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований. С этой целью, ко второй строке прибавим первую строку, умноженную на  $-2$ , к третьей строке прибавим первую строку, умноженную на  $-2$ , к четвертой строке прибавим первую строку, умноженную на  $2$  и к

четвёртой строке прибавим первую строку, умноженную на  $-3$ . В результате чего получим следующую эквивалентную матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -4 & 5 & 1 \\ 3 & 6 & 9 & 0 & -3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Все элементы последней строки являются нулями, поэтому её удаляем. Далее, оставим без изменения первую строку и прибавим к третьей строке первую строку, умноженную на  $7$ :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & -33 & 33 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь очевидно, что наивысший порядок минора, отличного от нуля, равен трем. Действительно,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -33 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot (-33) = 33 \neq 0.$$

**Ответ:** ранг матрицы равен трем, т.е.  $r(A) = 3$ .

4. Решить систему линейных алгебраических уравнений с помощью а) метода Гаусса, б) правила Крамера и в) обратной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 7. \end{cases}$$

(≤20 б.)

**Решение.** а) Составим расширенную матрицу и приведем её к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований (прямой ход):

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 & 7 \end{pmatrix};$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & -10 & -3 \\ 0 & 8 & -10 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 7 & -10 & -3 \\ 0 & 0 & 10 & 10 \end{pmatrix}.$$

### Комментарии:

1. Прибавили ко второй строке первую строку, умноженную на -2;

2. Прибавили к третьей строке первую строку, умноженную на -3;

3. Прибавили ко третьей строке, умноженной на 7, вторую строку, умноженную на -8.

Востановим теперь уравнения системы по последней матрице:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 7x_2 - 10x_3 = -3, \\ 10x_3 = 10. \end{cases}$$

Начиная с последнего уравнения системы, последовательно находим неизвестные (обратный ход):

$$x_3 = \frac{10}{10} = 1; \quad 7x_2 - 10 \cdot 1 = -3; \quad 7x_2 = 7; \quad x_2 = 1; \quad x_1 = 3 + 2 - 3 = 2.$$

Проверка показывает, что найденные значения неизвестных удовлетворяют данной системе и поэтому они являются её решением.

**б)** Составляя основной определитель системы, вычислим его:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-4) \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - \\ &- (-2) \cdot 2 \cdot (-1) - (-4) \cdot 2 \cdot 1 = -3 + 24 + 12 - 27 - 4 + 8 = 10 \neq 0. \end{aligned}$$

Вычислим вспомогательные определители, которые получаются соответственно из основного определителя заменой первого, второго и третьего столбца на столбец

свободных коэффициентов:

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 3 & 3 & -4 \\ 7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 3 \cdot (-1) + (-2) \cdot (-4) \cdot 7 + 3 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 7 - \\ - (-2) \cdot 3 \cdot (-1) - (-4) \cdot 2 \cdot 3 = -9 + 56 + 18 - 63 - 6 + 24 = 20;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \\ 3 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-1) + 3 \cdot (-4) \cdot 3 + 2 \cdot 7 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - \\ - 3 \cdot 2 \cdot (-1) - (-4) \cdot 7 \cdot 1 = -3 - 36 + 42 - 27 + 6 + 28 = 10;$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 7 + (-2) \cdot 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 \cdot 3 - \\ - (-2) \cdot 2 \cdot 7 - 3 \cdot 2 \cdot 1 = 21 - 18 + 12 - 27 + 28 - 6 = 10.$$

Теперь по формуле Крамера  $x_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta}$ ,  $i = \overline{1, n}$  находим

неизвестные:

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{20}{10} = 2; \quad x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{10}{10} = 1; \quad x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{10}{10} = 1.$$

**в)** Формула нахождения решения данной системы с помощью обратной матрицы имеет следующий вид:

$$x = A^{-1} \cdot b,$$

где  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  - матрица неизвестных,  $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix}$  - матрица

свободных коэффициентов и  $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$  -

обратная матрица, в которой  $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$  - алгебраические дополнения,  $T$  - знак транспонированной матрицы. Миноры  $M_{ij}$  получаются из определителя основной матрицы системы вычеркиванием  $i$ -ой строки и  $j$ -го столбца. Итак, мы должны найти обратную матрицу. Определитель уже найден. Определим все алгебраические дополнения. Имеем:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - (-4) \cdot 2 = -3 + 8 = 5;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = - \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(2 \cdot (-1) - (-4) \cdot 3) = -(-2 + 12) = -10;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 4 - 9 = -5;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -(-2 \cdot (-1) - 3 \cdot 2) = -(2 - 6) = 4;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) - 3 \cdot 3 = -1 - 9 = -10;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 - (-2) \cdot 3) = -(2 + 6) = -8;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-4) - 3 \cdot 3 = 8 - 9 = -1;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = -(1 \cdot (-4) - 3 \cdot 2) = -(-4 - 6) = 10;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 - (-2) \cdot 2 = 3 + 4 = 7.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & -10 & -5 \\ 4 & -10 & -8 \\ -1 & 10 & 7 \end{pmatrix}^T = \\ &= \frac{1}{10} \begin{pmatrix} 5 & 4 & -1 \\ -10 & -10 & 10 \\ -5 & -8 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -1 & -1 & \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{4}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Выполняя умножение, получим:

$$x = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{5} & -\frac{1}{10} \\ -1 & -1 & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{4}{5} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} + \frac{6}{5} - \frac{7}{10} \\ -3 - 3 + 7 \\ -\frac{3}{2} - \frac{12}{5} + \frac{49}{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

**Ответ:** (2,1,1).

5. Даны три точки:  $A_1(1,2)$ ,  $A_2(2,3)$  и  $A_3(0,5)$ .

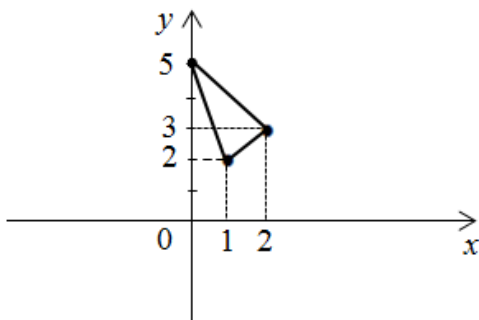
а) Постройте треугольник  $A_1A_2A_3$  и найдите его площадь;

б) Составьте уравнение прямой, проходящей через точки  $A_1A_2$ ,  $A_1A_3$ ,  $A_2A_3$ ;

в) Найдите расстояние между двумя точками  $A_1A_2$ ,  $A_1A_3$ ,  $A_2A_3$ .

(≤20 б.)

**Решение. а)** Отметим заданные точки в декартовой координатной системе и их присоединим:



Площадь полученного треугольника найдем по

формуле  $S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$ . Имеем:

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad x_3 = 0; \quad y_1 = 2; \quad y_2 = 3; \quad y_3 = 5;$$

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} (3 + 10 - 4 - 5) = \pm \frac{1}{2} \cdot 4 = 2.$$

Площадь треугольника можно была найти и по формуле  $S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}$ . Действительно,

$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 - 0 & 2 - 5 \\ 2 - 0 & 3 - 5 \end{vmatrix} = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$

**б)** Воспользуемся формулой  $\frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ , которая называется уравнением прямой, проходящей через две точки. Имеем:

*уравнение прямой, проходящей через точки  $A_1A_2$ :*

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad y_1 = 2; \quad y_2 = 3;$$

$$\frac{y-2}{3-2} = \frac{x-1}{2-1}; \quad \frac{y-2}{1} = \frac{x-1}{1}; \quad y-x-1=0;$$

*уравнение прямой, проходящей через точки  $A_1A_3$ :*

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 0; \quad y_1 = 2; \quad y_2 = 5;$$

$$\frac{y-2}{5-2} = \frac{x-1}{0-1}; \quad \frac{y-2}{3} = \frac{x-1}{-1}; \quad y+3x-5=0;$$

*уравнение прямой, проходящей через точки  $A_2A_3$ :*

$$x_1 = 2; \quad x_2 = 0; \quad y_1 = 3; \quad y_2 = 5;$$

$$\frac{y-3}{5-3} = \frac{x-2}{0-2}; \quad \frac{y-3}{2} = \frac{x-2}{-2}; \quad y+x-5=0.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в справедливости составленных уравнений.

**в)** Известно, что расстояние между двумя точками  $A_1(x_1; y_1)$  и  $A_2(x_2; y_2)$  находится по следующей формуле:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

*расстояние между двумя точками  $A_1A_2$ :*

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 2; \quad y_1 = 2; \quad y_2 = 3;$$

$$d = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2};$$

*расстояние между двумя точками  $A_1A_3$ :*

$$x_1 = 1; \quad x_2 = 0; \quad y_1 = 2; \quad y_2 = 5;$$

$$d = \sqrt{(0-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10};$$

*расстояние между двумя точками  $A_2A_3$ :*

$$x_1 = 2; x_2 = 0; \quad y_1 = 3; y_2 = 5;$$

$$d = \sqrt{(0 - 2)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{4 + 4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

**б) Образец варианта итоговой зачетной работы  
(первый семестр)**

1. Докажите, что  $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ .  
(≤20 б.)

**Решение.** Справедливость тождества докажем с помощью метода математической индукции. Для  $n=1$  оно справедливо. В самом деле,  $1 = \frac{1(1+1)}{2}$ ;  $1 = 1$ . Предположим, что тождество справедливо для  $n=k$ , т.е.

$$1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Используя это предположение, докажем его справедливости и для  $n=k+1$ , т.е. докажем, что

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} & 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \\ = & [1 + 2 + 3 + \dots + k] + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \\ = & \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}. \end{aligned}$$

Тождество доказано.

2. Пусть  $A$  есть множество решений неравенства  $|x - 5| \leq 3$ , а  $B$  - множество решений неравенства  $x^2 - 4x \leq 0$ . Требуется найти: 1)  $A \cup B$ , 2)  $A \cap B$ , 3)  $A/B$ , 4)  $A \Delta B$ .

(≤20 б.)

**Решение.** Для определения элементов множества  $A$  придется решить неравенство  $|x - 5| \leq 3$ . Данное неравенство можно решать различными способами. Мы его решим по формуле  $|x| \leq a$ ,  $a \geq 0$ ;  $-a \leq x \leq a$ .  
Имеем:

$$-3 \leq x - 5 \leq 3; \quad -3 + 5 \leq x \leq 3 + 5; \quad 2 \leq x \leq 8.$$

Итак, элементы множества  $A$  состоят из всех значений  $x$ , лежащих на отрезке  $[2; 8]$ , т.е.

$$A = \{x: 2 \leq x \leq 8\}.$$

Теперь определим элементы множества  $B$ , для чего придется решить неравенство  $x^2 - 4x \leq 0$ . Решим это неравенство с помощью метода интервалов. Имеем:

$$x^2 - 4x \leq 0; \quad x(x - 4) \leq 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 4.$$

Отметим числа 0 и 4 на числовой оси и определим знаки полученных интервалов. Для этого достаточно определить знак одного из интервалов, а другие чередуются в силу того, что эти числа являются однократным корнем двухчлена левой части неравенства. Выберем, например,  $x=5$ . Тогда  $x(x - 4) =$

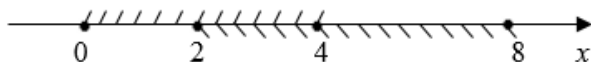
$5 \cdot (5 - 1) = 5 \cdot 4 = 20 > 0$ . Таким образом,



Отрезок  $[0,4]$  является решением, т.к. его знак соответствует знаку неравенства. Следовательно,

$$B = \{x: 0 \leq x \leq 4\}.$$

Теперь можем найти: 1)  $A \cup B$ , 2)  $A \cap B$ , 3)  $A \setminus B$ , 4)  $A \Delta B$ . С этой целью отметим решение обеих неравенств на одной числовой оси:



Очевидно, что

$$A \cup B = \{x: 0 \leq x \leq 8\}; \quad A \cap B = \{x: 2 \leq x \leq 4\};$$

$$A \setminus B = \{x: 4 < x \leq 8\}; \quad B \setminus A = \{x: 0 \leq x < 2\};$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \{x: (0 \leq x \leq 2) \cup (4 < x \leq 8)\}.$$

**3.** В группе 10 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 3 человек?

( $\leq 20$  б.)

**Решение.** Не менее трех человек это 3+7 или 4+6 или 5+5 (7+3, 6+4 - те же самые комбинации). В каждой выборке важен только состав, т.к. члены подгруппы не различаются по ролям, т.е. выборки это есть сочетания из  $n$  различных элементов по  $m$  элементов, а их число

равно

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Число выборок 3-х человек из 10 равно:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{7! \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 7!} = 4 \cdot 3 \cdot 10 = 120.$$

Число выборок 4-х человек из 10 равно:

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{6! \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 6!} = 7 \cdot 3 \cdot 10 = 210.$$

Число выборок 5-и человек из 10 равно:

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{5!(10-5)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5!} = 7 \cdot 2 \cdot 9 \cdot 2 = 252.$$

Согласно правилу сложения имеем:

$$C_{10}^3 + C_{10}^4 + C_{10}^5 = 120 + 210 + 252 = 582.$$

**Ответ:** 582 способа.

**4.** Исследовать систему и решить ее, если она совместна:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 6x_2 - 9x_3 = 15. \end{cases}$$

(≤20 б.)

**Решение.** Используем критерий Кронекера-Капелли. Для этого нам понадобится ранг основной и расширенной матрицы системы. Сначала составим основную матрицу системы и найдем её ранг. Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix}.$$

Приведём эту матрицу к ступенчатому виду. С этой целью прибавим ко второй строке первую строку, умноженную на -2 и прибавим к третьей строке первую строку, умноженную на -3. В результате чего получим следующую эквивалентную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отбросим последнюю строку с нулевыми элементами. Тогда будет ясно, что ранг матрицы равен двум, т.е.  $r(A) = 2$ .

Теперь составим расширенную матрицу и аналогично найдём её ранг. Имеем:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -9 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак, ранг расширенной матрицы также равен двум, т.е.  $r(\bar{A}) = 2$ . Поскольку  $r(A) = r(\bar{A})$ , то заданная система совместна. Однако она не определена, т.к. ранг меньше количества неизвестных. Поэтому система имеет бесконечно много решений. Считая, например,  $x_3$  известной, её перенесём в правую часть. Далее, отбросим последнее уравнение системы. Полученную систему уравнений решим с помощью метода Крамера. Имеем:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 5 + 3x_3, \\ 2x_1 + 3x_2 = 3 + x_3. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 4 = -1;$$

$$\Delta x_1 = \begin{vmatrix} 5 + 3x_3 & 2 \\ 3 + x_3 & 3 \end{vmatrix} = 15 + 9x_3 - 6 - 2x_3 = 9 + 7x_3;$$

$$\Delta x_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 + 3x_3 \\ 2 & 3 + x_3 \end{vmatrix} = 3 + x_3 - 10 - 6x_3 = -7 - 5x_3;$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{9 + 7x_3}{-1} = -9 - 7x_3;$$

$$x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-7 - 5x_3}{-1} = 7 + 5x_3.$$

Обозначая переменную  $x_3$  через  $\alpha$ , выпишем общий ответ:  $(-9 - 7\alpha; 7 + 5\alpha; \alpha)$ , где  $\alpha$  - произвольное

постоянное число. Например, при  $\alpha = 0$  получим одно из решений:  $(-9; 7; 0)$ .

**5.** Показать, что заданное уравнение определяет на плоскости эллипс и найти полуоси, координаты центра, координаты фокусов, вершины, а также эксцентриситет этого эллипса:  $9x^2 - 36x + 25y^2 - 50y = 164$ . Сделать чертеж.

( $\leq 20$  б.)

**Решение.** Напомним, что каноническое уравнение эллипса имеет следующий вид:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1,$$

в котором  $a$  - большая полуось эллипса,  $b$  - малая полуось эллипса,  $M(x_0, y_0)$  - координаты центра эллипса,  $F_1(c + x_0; y_0)$ ;  $F_2(-c + x_0; y_0)$ ,  $c = \sqrt{a^2 - b^2}$  - координаты фокусов эллипса,  $A(-a; 0)$ ;  $B(a; 0)$ ;  $C(0, -b)$ ;  $D(0; b)$  - вершины эллипса,  $\varepsilon = \frac{c}{a}$  - эксцентриситет эллипса.

Теперь вернёмся к решению задачи. Преобразуем заданное уравнение так, чтобы относительно  $x$  и  $y$  выделились полный квадрат. Имеем:

$$\begin{aligned} 9x^2 - 36x + 25y^2 - 50y &= 164; & 9(x^2 - 4x + 4) + \\ &+ 25(y^2 - 2y + 1) - 36 - 25 &= 164; \\ 9(x - 2)^2 + 25(y - 1)^2 &= 225; \end{aligned}$$

$$\frac{9(x-2)^2}{225} + \frac{25(y-1)^2}{225} = 1; \quad \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1;$$

$$\frac{(x-2)^2}{5^2} + \frac{(y-1)^2}{3^2} = 1.$$

Таким образом, заданное уравнение определяет на плоскости эллипс, в котором:

$a=5$  - его большая полуось;

$b=3$  - его малая полуось;

$x_0 = 2$ ;  $y_0 = 1$ ;  $M(2, 1)$  - координаты его центра;

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$ ;

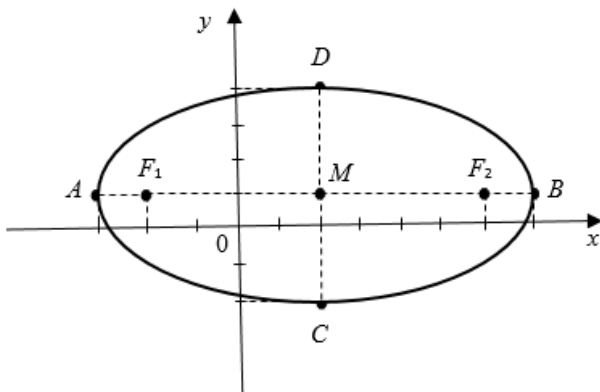
$c + x_0 = 4 + 2 = 6$ ;  $-c + x_0 = -4 + 2 = -2$ ;

$F_1(6; 1)$ ;  $F_2(-2; 1)$  - координаты его фокусов;

$A(-5; 0)$ ;  $B(5; 0)$ ;  $C(0, -3)$ ;  $D(0; 3)$  - координаты его вершины;

$\varepsilon = \frac{4}{5} = 0,8$  - его эксцентриситет.

Сделаем чертёж полученного эллипса:



*в) Образец варианта контрольной работы для  
второго семестра*

1. Найти область определения функции:  $y = \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$ .  
(≤ 8 б.)

**Решение.** Область определения функции это те значения аргумента  $x$ , при которых функция определена, т.е. имеет смысл. В нашем случае функция представляет собой квадратный корень. Поэтому она имеет смысл, если выражение, находящееся под знаком корня, не отрицательно. Итак, область определения заданной функции состоит из всех значений  $x$ , удовлетворяющих следующему неравенству:

$$\frac{x+3}{x-2} \geq 0.$$

Решим полученное неравенство с помощью метода интервалов. Для этого отметим на числовой оси нули выражений, стоящих в числителе и знаменателе дроби, и после чего определим знаки полученных интервалов. Ноль знаменателя не входит в решение, так как на ноль делить нельзя.



Знак интервалов  $(-\infty; -3]$  и  $(2; +\infty)$  совпадают со знаком неравенства. Поэтому их объединение является его решением.

**Ответ:**  $D(y) = (-\infty; -3] \cup (2; +\infty)$ .

2. Найти предел:  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - x - 1}$ .

(≤8 б.)

**Решение.** Непосредственная подстановка значения  $x=1$  в выражение даёт неопределённость вида  $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ . Действительно,

$$\frac{3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1 - 1}{2 \cdot 1^2 - 1 - 1} = \frac{0}{0}.$$

Отсюда следует, что оба трёхчлена делятся без остатка на двухчлен  $x-1$ , т.е. из каждого трёхчлена можно выделить этот двухчлен. В результате этого дробь на двухчлен  $x-1$  сократится и мы избавимся от неопределённости. Имеем:

$$\begin{aligned} 3x^2 - 2x - 1 &= 3x^2 - 3x + x - 1 = \\ &= 3x(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(3x + 1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x^2 - x - 1 &= 2x^2 - 2x + x - 1 = \\ &= 2x(x - 1) + (x - 1) = (x - 1)(2x + 1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{2x^2 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(3x+1)}{(x-1)(2x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{2x+1} = \\ &= \frac{3 \cdot 1 + 1}{2 \cdot 1 + 1} = \frac{4}{3} = 1 \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Отметим, что трёхчлены можно было разложить по следующей формуле:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где  $x_1, x_2$  — корни трёхчлена. В самом деле,

$$\begin{aligned}3x^2 - 2x - 1 &= 0; \quad D = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = \\ &= 4 + 12 = 16 > 0; \quad x_1 = \frac{2-4}{2 \cdot 3} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}; \\ x_2 &= \frac{2+4}{2 \cdot 3} = \frac{6}{6} = 1;\end{aligned}$$

$$3x^2 - 2x - 1 = 3 \left( x + \frac{1}{3} \right) (x - 1) = (3x + 1)(x - 1);$$

$$\begin{aligned}2x^2 - x - 1 &= 0; \quad D = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1) = \\ &= 1 + 8 = 9 > 0; \quad x_1 = \frac{1-3}{2 \cdot 2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2};\end{aligned}$$

$$x_2 = \frac{1+3}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1;$$

$$2x^2 - x - 1 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 1) = (2x + 1)(x - 1).$$

**Ответ:**  $1\frac{1}{3}$ .

**3.** Составить уравнения касательной и нормали к кривой  $f(x) = x^3 + 4x$  в точке с абсциссой  $x_0=2$ .

( $\leq 10$  б.)

**Решение.** Уравнения касательной и нормали имеют соответственно следующий вид:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0);$$

$$y = f(x_0) - \frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Найдём производную:

$$f'(x) = (x^3 + 4x)' = (x^3)' + 4(x)' = 3x^2 + 4.$$

Вычислим значение функции и производной в точке  $x_0=2$ :

$$f(x_0) = f(2) = 2^3 + 4 \cdot 2 = 8 + 8 = 16;$$

$$f'(x_0) = f'(2) = 3 \cdot 2^2 + 4 = 12 + 4 = 16.$$

Подставляя необходимые значения в уравнения, выполняя соответствующие действия, получим:

уравнение касательной:

$$y = 16 + 16(x - 2) = 16 + 16x - 32 = 16x - 16;$$

уравнение нормали:

$$y = 16 - \frac{1}{16}(x - 2) = 16 - \frac{x}{16} + \frac{1}{8} = -\frac{1}{16}x + 16\frac{1}{8}.$$

**4.** Исследовать на экстремум функцию  
 $y = x^3 - 3x + 2.$

(≤ 10 б.)

**Решение.** Напомним схему исследования функции на экстремум.

Пусть для функции  $y=f(x)$  выполнены следующие условия:

1. Функция непрерывна в окрестности точки  $x_0$ ;
2.  $f'(x_0) = 0$  или  $f'(x_0)$  не существует;

3. Производная  $f'(x)$  при переходе через точку  $x_0$  меняет свой знак.

Тогда в точке  $x=x_0$  функция  $y=f(x)$  имеет экстремум, причем это минимум, если при переходе через точку  $x_0$  производная меняет свой знак с минуса на плюс; максимум, если при переходе через точку  $x_0$  производная меняет свой знак с плюса на минус.

Если производная  $f'(x)$  при переходе через точку  $x_0$  не меняет знак, то экстремума в точке  $x=x_0$  нет.

Таким образом, для того чтобы исследовать функцию  $y=f(x)$  на экстремум, необходимо:

1. Найти производную  $f'(x)$ ;

2. Найти критические точки, то есть такие значения  $x$ , в которых  $f'(x) = 0$  или  $f'(x)$  не существует;

3. Исследовать знак производной слева и справа от каждой критической точки;

4. Найти значение функции в экстремальных точках.

Приступим теперь к решению задачи. Находим производную заданной функции:

$$y' = (x^3 - 3x + 2)' = (x^3)' - 3(x)' + (2)' = 3x^2 - 3.$$

Ищем критические точки функции, для этого решаем уравнение  $y' = 0$ :

$$3x^2 - 3 = 0; \quad x^2 - 1 = 0; \quad x^2 = 1; \quad x = \pm 1;$$

$$x_1 = -1; \quad x_2 = 1;$$

Итак, имеем две критических точки  $x_1 = -1$ ;  $x_2 = 1$ . Наносим эти точки на координатную прямую и исследуем знак производной слева и справа от этих точек (для этого из каждого промежутка берем произвольное значение и находим значение производной в выбранной точке, определяем знак полученной величины):



Так как при переходе через точку  $x=-1$  производная сменила свой знак с "+" на "-", то в этой точке функция достигает максимума (или максимального значения), причем

$$y_{max} = y(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 2 = -1 + 3 + 2 = 4.$$

При переходе через точку  $x=1$  производная меняет свой знак с "-" на "+", то в этой точке функция достигает минимума (или минимального значения). Оно равно

$$y_{min} = y(1) = 1^3 - 3 \cdot 1 + 2 = 1 - 3 + 2 = 0.$$

$$\text{Ответ: } y_{min} = y(1) = 0; y_{max} = y(-1) = 4.$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 3$ ,  $x \in [-2, 1]$ .

(≤10 б.)

**Решение.** Для нахождения наибольшего (наименьшего) значения функции в промежутке  $[a, b]$  нужно сравнить значения функции на границах промежутка со значениями в экстремальных точках, принадлежащих данному промежутку, и среди них выбрать наибольшее (наименьшее). Имеем:

$$f'(x) = (x^4 - 2x^2 + 3)' = 4x^3 - 4x; \quad f'(x) = 0;$$

$$4x^3 - 4x = 0; \quad 4x(x - 1) = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 1.$$

Так как обе экстремальные точки принадлежат отрезку  $[-2, 1]$ , то значения функции находим в этих точках и на границах:

$$f(-2) = (-2)^4 - 2 \cdot (-2)^2 + 3 = 16 - 8 + 3 = 11;$$

$$f(0) = 0^4 - 2 \cdot 0^2 + 3 = 0 - 0 + 3 = 3;$$

$$f(1) = 1^4 - 2 \cdot 1^2 + 3 = 1 - 2 + 3 = 1.$$

$$\text{Ответ: } \min_{[-2; 1]} f(x) = 1; \quad \max_{[-2; 1]} f(x) = 11.$$

6. Применяя правило Лопиталья, найти предел:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1}.$$

(≤5 б.)

**Решение.** Подстановка предельного значения  $x=1$  приводит к неопределённости вида  $\left\{\frac{0}{0}\right\}$ . Применим правило Лопиталья:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^5 - 1)'}{(2x^3 - x - 1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^4}{6x^2 - 1} = \\ &= \frac{5 \cdot 1^4}{6 \cdot 1^2 - 1} = \frac{5}{6 - 1} = \frac{5}{5} = 1. \end{aligned}$$

**Ответ:** 1.

7. Найти неопределенный интеграл:  
 $\int (\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{x} - 3x^2) dx.$

(≤8 б.)

**Решение.** Для нахождения заданного неопределённого интеграла используем следующие свойства и формулы:

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx;$$

$$\int Cf(x) dx = C \int f(x) dx, \quad C = \text{const};$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \int (\operatorname{tg}^2 x + \sqrt{x} - 3x^2) dx = \\ & = \int \operatorname{tg}^2 x dx + \int \sqrt{x} dx - 3 \int x^2 dx. \end{aligned}$$

Находим полученные три неопределённые интегралы в отдельности:

$$\begin{aligned} \int \operatorname{tg}^2 x dx &= \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \\ &= \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C_1; \end{aligned}$$

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C_2 = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + C_2 =$$

$$= \frac{2\sqrt{x^3}}{3} + C_2 = \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C_2;$$

$$3 \int x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} + C_3 = x^3 + C_3.$$

Итак,

$$\int (tg^2x + \sqrt{x} - 3x^2) dx = tgx - x + \frac{2x\sqrt{x}}{3} - x^3 + C.$$

Поскольку сумма трёх постоянных чисел есть постоянное число, то достаточно написать одно постоянное число  $C$ .

**8.** Найти неопределенный интеграл методом подстановки:  $\int xe^{x^2} dx$ .

(≤5 б.)

**Решение.** Легко заметим, что дифференциал от функции  $x^2$  даёт  $2xdx$ . Следовательно,

$$\int xe^{x^2} dx = \left| \begin{array}{l} x^2 = t; \\ 2xdx = dt; \quad xdx = \frac{1}{2}dt \end{array} \right| = \frac{1}{2} \int e^t dt =$$

$$= \frac{1}{2}e^t + C = \frac{1}{2}e^{x^2} + C.$$

9. Найти определенный интеграл методом интегрирования по частям:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x dx$ . (≤10 б.)

**Решение.** Формула интегрирования по частям имеет следующий вид:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

где  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  — непрерывно дифференцируемые функции. В ходе решения задачи используем формулу Ньютона-Лейбница, имеющую следующий вид:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a), \quad F'(x) = f(x).$$

В качестве  $u$  возьмём  $x$ , так как её производная равна единице. Имеем:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx &= \left| \begin{array}{l} x = u; \quad \cos 2x \, dx = dv \\ dx = du; \quad \frac{1}{2} \sin 2x = v \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{2} x \cdot \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \sin \pi - \\
&\quad - \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot \sin 0 + \frac{1}{4} \cos 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{4} \cos \pi - \frac{1}{4} \cos 0 = \\
&= -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1+1}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

**10.** Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной линиями:  $y = x^2 - 1$ ,  $y = -x^2 + 7$ .

(≤10 б.)

**Решение.** Сначала находим точки пересечения графиков заданных функций. Для этого приходится решать следующую систему:

$$\begin{cases} y = x^2 - 1, \\ y = -x^2 + 7; \end{cases} \quad x^2 - 1 = -x^2 + 7; \quad 2x^2 = 8;$$

$$x = \pm 2; \quad x_1 = -2; \quad x_2 = 2;$$

$$y_1 = (-2)^2 - 1 = 4 - 1 = 3; \quad y_2 = 2^2 - 1 = 4 - 1 = 3.$$

Итак, графики функции пересекаются в точках  $M(-2;3)$  и  $N(2;3)$ . Построим схематический графики функций. Оба графика являются параболой. Ветви первой параболы направлены вверх (коэффициент при  $x^2$  положителен), а второй параболы - вниз (коэффициент при  $x^2$  отрицателен). Для уточнения графиков найдем вершину и точки их пересечения с осями координат. Имеем:

*для первой параболы:*

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot 1} = 0; \quad y_0 = 0^2 - 1 = -1;$$

$A(0; -1)$  – вершина;

$$x = 0; \quad y = 0^2 - 1 = -1;$$

точка пересечения с абсциссой совпадает с вершиной;

$$y = 0; \quad x^2 - 1 = 0; \quad x_1 = -1; \quad x_2 = 1;$$

$B(-1;0)$  и  $C(1;0)$  - точки пересечения с ординатой;

для второй параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0; \quad y_0 = -0^2 + 7 = 7;$$

$A_1(0; 7)$  – вершина;

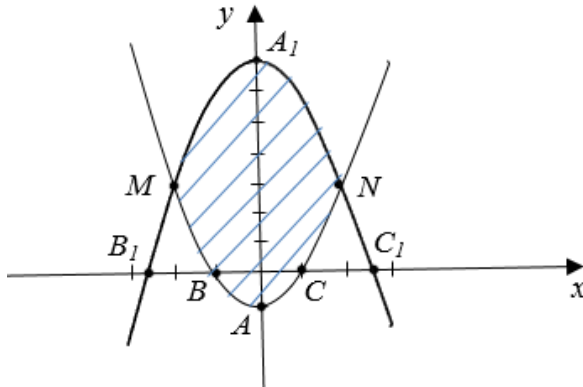
$$x = 0; \quad y = -0^2 + 7 = 7;$$

точка пересечения с абсциссой совпадает с вершиной;

$$y = 0; \quad -x^2 + 7 = 0; \quad x_1 = -\sqrt{7} \approx -2,6; \quad x_2 = \sqrt{7} \approx 2,6;$$

$B_1(-2,6;0)$  и  $C_1(2,6;0)$  - точки пересечения с абсциссой.

Отметим найденные точки на плоскости:



Итак, необходимо найти площадь заштрихованной

фигуры, которая равна

$$\begin{aligned} S &= \int_{-2}^2 (-x^2 + 7 - x^2 + 1) dx = \int_{-2}^2 (-2x^2 + 8) dx = \\ &= 2 \int_0^2 (-2x^2 + 8) dx = 2 \left( -2 \cdot \frac{x^3}{3} + 8x \right) \Big|_0^2 = \\ &= 2 \cdot \left( -2 \cdot \frac{2^3}{3} + 8 \cdot 2 \right) = 2 \left( -\frac{16}{3} + 16 \right) = 2 \cdot \frac{32}{3} = \frac{64}{3}. \end{aligned}$$

**Ответ:**  $\frac{64}{3}$ .

**11.** В кабинете работают 6 мужчин и 3 женщины. Для переезда наудачу отобраны 5 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц две женщины.

( $\leq 10$  б.)

**Решение.** Общее число возможных исходов равно числу способов, которыми можно отобрать 5 человек из 9, т.е.

$$n = C_9^5 = \frac{9!}{5!(9-5)!} = \frac{5! \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9}{5! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 7 \cdot 2 \cdot 9 = 126.$$

Найдем число исходов, благоприятствующих интересующему нас событию, которое обозначим через  $A$ : двух женщин можно выбрать из трёх  $C_3^2$  способами. При этом остальные три человека должны быть мужчинами, их можно отобрать  $C_6^3$  способами. Следовательно, число благоприятствующих исходов равно

$$m = C_3^2 \cdot C_6^3 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} \cdot \frac{6!}{3! \cdot 3!} =$$

$$= \frac{2! \cdot 3}{2!} \cdot \frac{3! \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{3! \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60.$$

Согласно классической формуле вероятностей имеем:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{60}{126} = \frac{30}{63} = \frac{10}{21} \approx 0,48.$$

**12.** Закон распределения дискретной случайной величины задан следующей таблицей:

X	1	2	3	4	5
P	0,1	0,2	0,1	0,2	0,4

Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение данной случайной величины.

(≤6 б.)

**Решение.** Математическое ожидание находим по формуле

$$M(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 + \dots + x_n p_n:$$

$$\begin{aligned} M(X) &= 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,2 + 3 \cdot 0,1 + 4 \cdot 0,2 + 5 \cdot 0,4 = \\ &= 0,1 + 0,4 + 0,3 + 0,8 + 2 = 3,6. \end{aligned}$$

Дисперсию находим по следующей формуле:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 p_i - [M(X)]^2 =$$

$$= x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 + \dots + x_n^2 p_n - [M(X)]^2:$$

$$\begin{aligned} D(X) &= 1^2 \cdot 0,1 + 2^2 \cdot 0,2 + 3^2 \cdot 0,1 + 4^2 \cdot 0,2 + 5^2 \cdot 0,4 - \\ &- (3,6)^2 = 0,1 + 0,8 + 0,9 + 3,2 + 10 - 12,96 = 2,04. \end{aligned}$$

И, наконец, по формуле  $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$  находим среднее квадратичное отклонение:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2,04} \approx 1,43.$$

**Ответ:**  $M(X) = 3,6; D(X) = 2,04; \sigma(X) \approx 1,43.$

## Порядок формирования оценок по дисциплине

Оценка всех форм контроля знаний осуществляется по 100-балльной шкале. Итоговая оценка за зачет  $R$  по 100-балльной шкале формируется как взвешенная сумма

$$R = 0,7 \cdot O_{зач} + 0,3 \cdot O_{кр}.$$

**Примечание.** У каждого студента будет свой вариант. При составлении вариантов будут использованы задачи, приведённые в качестве задач для самостоятельной работы по каждой теме. На экзамене каждый билет состоит из четырех вопросов, два из которых по теории и два - по практике. Задачи для самостоятельной работы используются также и для экзамена.

## **§10. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины**

### ***Основная литература***

1. Одинабеков Д.М., Олуфтаев Н.Ф. Краткий курс высшей математики. Душанбе: Тайрон-2014, 2018.
2. Абдукаримов М.Ф., Бобоёров Ш.К. Высшая алгебра в примерах. Душанбе: Эр-граф, 2017.
3. Крицков Л.В. Высшая математика в вопросах и ответах: учебное пособие. Москва: Проспект, 2016.
4. Шикин Е.В., Шикина Г.Е. Гуманитариям о математике: Пути знакомства. Основные понятия. Методы. Модели. Москва: Ленанд, 2015.
5. Кремер Н.Ш. и др. Высшая математика для экономистов. Москва: Юнити-Дана, 2012.
6. Назаров А.И., Назаров И.А. Курс математики для нематематических специальностей и направлений бакалавриата. Санкт-Петербург: Лань, 2011.

### ***Дополнительная литература***

7. Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. Москва: Юрайт, 2016.
8. Нуриддинов Ш.Н. Сборник индивидуальных заданий по математическому анализу, ч.1. Душанбе: Типография филиала МГУ имени М.В.Ломоносова, 2016.

9. Нуриддинов Ш.Н. Сборник индивидуальных заданий по математическому анализу, ч.2. Душанбе: Типография филиала МГУ имени М.В.Ломоносова, 2016.

10. Господариков А.П. и др. Математический практикум, ч.2. Санкт-петербург, 2010.

11. Грес П.В. Математика для гуманитариев: Учебное пособие. Москва: Логос, 2009.

12. Еровенко В.А., Мартон М.В. Избранные главы курса «Основы высшей математики» для философов. Минск, 2009.

13. Лунгу К.Н. и др. Сборник задач по высшей математике. Москва: Айрис-пресс, 2007.

14. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия, т. 1. Москва: Зерцало, 2003.

15. Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия, т. 2. Москва: Зерцало, 2003.

### ***Программное обеспечение и Интернет-ресурсы***

Студентам для выполнения самостоятельных работ рекомендуется использовать следующие поисковые системы:

- <https://www.google.com>
- [www.yandex.ru](http://www.yandex.ru)
- [www.reshebnik.ru](http://www.reshebnik.ru)
- [www.exponenta.ru](http://www.exponenta.ru)
- <https://onlinemschool.com>
- <http://mathprofi.ru>
- <https://www.mathhelp.spb.ru>

## Оглавление

Предисловие.....	3
§1. Цели и задачи дисциплины.....	5
§2. Место дисциплины в структуре ОПОП бакалавриата.....	6
§3. Планируемые результаты.....	7
§4. Результаты освоения учебной дисциплины, подлежащие проверке.....	8
§5. Объем дисциплины в зачётных единицах с указанием количества академических или астрономических часов.....	9
§6. Распределение трудоемкости по разделам и темам.....	10
§7. Содержание дисциплины.....	12
§8. Формы и методы оценивания освоения учебной дисциплины.....	63
§9. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов, оценочные средства контроля успеваемости и промежуточной аттестации.....	83
§10. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины.....	122